Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:.......................

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa II*, grupa I, 1 lutego 2020

Część zadaniowa (35pkt)

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania na osobnych kartkach podpisanych imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy (grupa I) i zadania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–7 pkt. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Dla każdego n zmienne losowe X_n i Y_n są niezależne i mają jednakowy rozkład. Ponadto ciąg $X_n + Y_n$ zbiega według rozkładu do rozkładu normalnego o średniej 0 i wariancji 8. Czy z tego wynika zbieżność według rozkładu ciągu X_n, a jeśli tak, to do jakiej granicy?

2. Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbb{P}(X_n = 3\sqrt{n}) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X_n = -\sqrt{n}) = 3/4$. W zależności od parametru $\alpha > 0$ oblicz granicę
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \leqslant 5n^\alpha\right).$$

3. Niech $(S_n)_{n\geqslant 0}$ będzie symetrycznym błądzeniem losowym na prostej, startującym z zera, zaś τ pierwszym momentem w którym S_n przyjmuje wartość 4.
i) Wyznacz wszystkie pary liczb $(a, b) \in (0, 1) \times (0, \infty)$ dla których $a^n b^{S_n}$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez S_n.
ii) Dla $a \in (0, 1)$ oblicz $\mathbb{E}a^\tau$.

4. $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi, wspólnie ograniczonymi zmiennymi losowymi o średniej 0 i wariancji 1. Wyznacz wszystkie $\alpha > 0$ takie, że ciąg $Z_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + k^{-\alpha}X_k)$
a) jest zbieżny prawie na pewno,
b) jest zbieżny w L^2.

5. Rzucamy kostką dopóki nie wyrzucimy szóstki lub dwóch piątek pod rząd. Oblicz
a) prawdopodobieństwo tego, że gra się skończy serią piątek,
b) wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów,
c) wartość oczekiwaną sumy wyrzuconych oczek.

6. Łaćuch Markowa X_n o wartościach naturalnych jest nieprzywiedlny, nieokresowy i ma rozkład stacjonarny $(\pi_n)_{n\geqslant 0}$. Niech Y_n będzie niezależną kopią X_n, oblicz
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n > Y_n).$$

Obróć kartkę, by wypełnić część testową egzaminu!

Część testowa (25pkt)

W poniższych zadaniach φ_X oznacza funkcję charakterystyczną zmiennej losowej X. Odpowiedzi proszę podawać w jak najprostszej postaci. W odpowiedziach można uzywać dystrybuanty rozkładu normalnego.

1. (2pkt) Sformułuj twierdzenie Bochnera.

2. (2pkt) Sformułuj kryterium powracalności nieprzywiedlnego łańcucha Markowa.

3. (2pkt) Zmienne X_1 i X_2 są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem 5, wówczas $\varphi_{2X_1-3X_2}(t)=$.....................
4. (4pkt) Dwuwymiarowy wektor losowy (X,Y) ma rozkład gaussowski ze średnią $(1,-3)$ i macierzą kowariancji $C=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Oblicz $\mathbb{P}(Y>2X)=$............................ oraz dwuwymiarową funkcję charakterystyczną $\varphi_{X,Y}(t_1,t_2)=$...........................
5. (4pkt) Niech X_n będzie łańcuchem Markowa o przestrzeni stanów $\{1,2,3\}$ i macierzy przejścia $P=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Oblicz
   $\mathbb{P}(X_2=X_1|X_0=1)=$..........
   $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n=1|X_0=2)=$ ....
6. (2pkt) Nieujemne zmienne losowe X_n zbiegają według rozkładu do zmiennej X. Wynika stąd, że (podkreśl właściwe odpowiedzi):
   $\lim_n \mathbb{E}X_n=\mathbb{E}X$, $\mathbb{P}(X\geqslant 0)=1$, $\lim_n \mathbb{E}e^{-X_n}=\mathbb{E}e^{-X}$, $\lim_n \mathbb{P}(X_n\geqslant 1)=\mathbb{P}(X\geqslant 1)$.
7. (3pkt) Zmienna losowa X spełnia $\varphi_X(t)=\frac{1}{2}(\exp(-4t^2)+e^{3it})$. Wówczas $\mathbb{P}(X>0)=$.............
   $\mathbb{E}X=$.............$\mathrm{Var}(X)=$ ....
8. (2pkt) Scharakteryzuj za pomocą funkcji charakterystycznej niezależność zmiennych X i Y.

9. (2pkt) Zmienne σ i τ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$. Wówczas następujące zmienne muszą być momentami zatrzymania (podkreśl właściwe odpowiedzi):
   $(\sigma+1)\wedge\tau$, $\tau\vee(\sigma-1)$, τ^2, $\tau+\sigma$.
10. (2pkt) Podaj definicję jednostajnej całkowalności rodziny zmiennych losowych $(X_i)_{i\in I}$.

Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:........................

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa II*, grupa II, 1 lutego 2019

Część zadaniowa (35pkt)

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania na osobnych kartkach podpisanych imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy (grupa II) i zadania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–7 pkt. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Dla każdego n zmienne losowe X_n i Y_n są niezależne i mają jednakowy rozkład. Ponadto ciąg $X_n + Y_n$ zbiega według rozkładu do rozkładu normalnego o średniej 0 i wariancji 16. Czy z tego wynika zbieżność według rozkładu ciągu X_n, a jeśli tak, to do jakiej granicy?

2. Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbb{P}(X_n = \sqrt{n}) = \frac{4}{5}$, $\mathbb{P}(X_n = -4\sqrt{n}) = 1/5$. W zależności od parametru $\alpha > 0$ oblicz granicę
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \leqslant 2n^{\alpha}\right).$$

3. Niech $(S_n)_{n\geqslant 0}$ będzie symetrycznym błądzeniem losowym na prostej, startującym z zera, zaś τ pierwszym momentem w którym S_n przyjmuje wartość 5.
i) Wyznacz wszystkie pary liczb $(a, b) \in (0,1) \times (0, \infty)$ dla których $a^n b^{S_n}$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez S_n.
ii) Dla $a \in (0,1)$ oblicz $\mathbb{E}a^{\tau}$.

4. $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi, wspólnie ograniczonymi zmiennymi losowymi o średniej 0 i wariancji 1. Wyznacz wszystkie $\alpha > 0$ takie, że ciąg $Z_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + k^{-\alpha}X_k)$
a) jest zbieżny w L^2,
a) jest zbieżny prawie na pewno.

5. Rzucamy kostką dopóki nie wyrzucimy dwójki lub dwóch jedynek pod rząd. Oblicz
a) prawdopodobieństwo tego, że gra się skończy dwójką,
b) wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów,
c) wartość oczekiwaną sumy wyrzuconych oczek.

6. Łańcuch Markowa X_n o wartościach naturalnych jest nieprzywiedlny, nieokresowy i ma rozkład stacjonarny $(\pi_n)_{n\geqslant 0}$. Niech Y_n będzie niezależną kopią X_n, oblicz
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \geqslant Y_n).$$

Obróć kartkę, by wypełnić część testową egzaminu!

Część testowa (25pkt)

W poniższych zadaniach φ_X oznacza funkcję charakterystyczną zmiennej losowej X. Odpowiedzi proszę podawać w jak najprostszej postaci. W odpowiedziach można uzywać dystrybuanty rozkładu normalnego.

1. (4pkt) Dwuwymiarowy wektor losowy (X, Y) ma rozkład gaussowski ze średnią $(-2, 1)$ i macierzą kowariancji $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Oblicz $\mathbb{P}(X > 3Y) =$............................ oraz dwuwymiarową funkcję charakterystyczną $\varphi_{X,Y}(t_1, t_2) =$............................

2. (2pkt) Podaj definicję jednostajnej całkowalności rodziny zmiennych losowych $(X_i)_{i \in I}$.

3. (4pkt) Niech X_n będzie łańcuchem Markowa o przestrzeni stanów $\{1, 2, 3\}$ i macierzy przejścia $P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Oblicz
$\mathbb{P}(X_2 = X_1 | X_0 = 3) =$..........
$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2 | X_0 = 3) =$ ....

4. (2pkt) Zmienne X_1 i X_2 są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem 3, wówczas $\varphi_{5X_1 - 2X_2}(t) =$............................

5. (2pkt) Zmienne σ i τ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 0}$. Wówczas następujące zmienne muszą być momentami zatrzymania (podkreśl właściwe odpowiedzi):
τ^2, $\tau + \sigma$, $(\sigma + 2) \wedge \tau$, $\tau \vee (\sigma - 2)$.

6. (2pkt) Nieujemne zmienne losowe X_n zbiegają według rozkładu do zmiennej X. Wynika stąd, że (podkreśl właściwe odpowiedzi):
$\mathbb{P}(X \geqslant 0) = 1$, $\lim_n \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X$, $\lim_n \mathbb{P}(X_n \leqslant 5) = \mathbb{P}(X \leqslant 5)$, $\lim_n \mathbb{E}e^{-2X_n} = \mathbb{E}e^{-2X}$.

7. (3pkt) Zmienna losowa X spełnia $\varphi_X(t) = \frac{1}{2}(\exp(-9t^2) + e^{-5it})$. Wówczas $\mathbb{E}X =$..................
$\mathrm{Var}(X) =$ ...., $\mathbb{P}(X > 0) =$..............

8. (2pkt) Scharakteryzuj za pomocą funkcji charakterystycznej niezależność zmiennych X i Y.

9. (2pkt) Sformułuj kryterium powracalności nieprzywiedlnego łańcucha Markowa.

10. (2pkt) Sformułuj twierdzenie Bochnera.