Imię i nazwisko:... Numer indeksu:........................

Egzamin z rachunku prawdopodobieństwa I*
grupa I, 4 czerwca 2005

Część zadaniowa

Spośród poniższych sześciu zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania. Każde z zadań będzie oceniane w skali 0-7.

1. Zmienne X i Y są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem 4. Oblicz $\mathbf{E}((X+Y)^2|X)$ oraz $\mathbf{E}(X|(X+Y)^2)$.

2. Udowodnij, że jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$, $Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$, to dla dowolnej funkcji ciągłej $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} f(X, Y)$.

3. Załóżmy, że $X_0, X_1, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, a R jest promieniem zbieżności losowego szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} X_n z^n$. Wykaż, że istnieje $r \in [0, \infty]$ takie, że $\mathbf{P}(R = r) = 1$.

4. Zmienne X i Y są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 2. Znajdź rozkład zmiennej $X + 2Y$.

5. Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$ o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 2]$. Czy zmienne $\sqrt[n]{X_1 X_2 \cdots X_n}$ są zbieżne prawie na pewno? Jeśli tak, to znajdź ich granicę.

6. Niezależne zmienne losowe X i Y mają standardowy rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$. Znajdź gęstość zmiennych $\frac{|X|}{|Y|}$ i $\frac{X}{Y}$.

Część testowa

1. (2pkt) Podaj definicję $\liminf A_n =$

2. (3pkt) Zmienne losowa X ma dystrybuantę F. Oblicz
   $\mathbf{P}(X = a) =$
   $\mathbf{P}(a \leqslant X \leqslant b) =$

3. (4pkt) Zmienna X ma rozkład normalny ze średnią 0 i wariancją 5. Znajdź gęstość zmiennej $Y = \sqrt{|X|}$, $g_Y(x) =$

4. (4pkt) Niezależne zmienne losowe X i Y mają rozkład Poissona z parametrem 1. Oblicz
   $\mathbf{P}(X > 0, Y > 0) =$
   $\mathbf{P}(X + Y = 15) =$
   $\mathrm{Var}(2X + 3Y) =$.

5. (4pkt) W pewnej skarbonce jest 100 monet - 99 normalnych i 1 sfałszowana mająca po obu stronach orły. Ze skarbonki wylosowano monetę i rzucono nią 5 razy za każdym razem wyrzucając orła. Prawdopodobieństwo, że wylosowana moneta jest sfałszowana wynosi ....

6. (3pkt) Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają jednakowy rozkład, zaś $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Który z poniższych warunków implikuje $\mathbf{E}|X_1| < \infty$? (podkreśl prawidłowe odpowiedzi) $\frac{S_n}{n} \to 0$ p.n.; $\frac{S_n}{n} \to 0$ według prawdopodobieństwa; $\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} < \infty$ p.n.; $\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{n} < \infty$ p.n.

7. (3pkt) Zmienne losowe X i Y są niezależne, symetryczne i ograniczone. Wynika stąd, że (podkreśl prawidłowe odpowiedzi): $\mathbf{E}XY = 0$; $\mathbf{E}|X+Y| \geqslant \mathbf{E}|X|$; $\mathbf{E}(XY|\mathcal{G}) = \mathbf{E}(X|\mathcal{G})\mathbf{E}(Y|\mathcal{G})$ dla dowolnego sigma ciała $\mathcal{G}$; $\mathbf{P}(X > 1|Y) = \mathbf{P}(X > 1)$ p.n.

8. (4pkt) Uzupełnij tekst: 10 jednakowych cukierków można podzielić między 4 chłopców na .... sposobów. Prawdopodobieństwo, że przy losowym podziale pierwszy z chłopców nie dostanie żadnego cukierka wynosi .... Przy losowym podziale pierwszy z chłopców dostanie średnio .... cuk.

9. (4pkt) Niech $X = \mathbf{P}(A|\mathcal{G})$ oraz $B \in \mathcal{G}$. Wówczas $\mathbf{E}X =$............., $\mathbf{E}X1_B =$ .... oraz $\mathbf{P}(A \cap B|\mathcal{G}) =$ ....

10. (4pkt) Sformułuj obie części Lematu Borella-Cantelliego.

Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:........................

Egzamin z rachunku prawdopodobieństwa I*
grupa II, 4 czerwca 2005

Część zadaniowa

Spośród poniższych sześciu zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania. Każde z zadań będzie oceniane w skali 0-7.

1. Niezależne zmienne losowe X i Y mają standardowy rozkład normalny $\mathcal{N}(0,1)$. Znajdź gęstość zmiennych $\frac{|X|}{|Y|}$ i $\frac{X}{Y}$.
2. Zmienne X i Y są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 4. Znajdź rozkład zmiennej $2X+Y$.
3. Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$ o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,5]$. Czy zmienne $\sqrt[n]{X_1 X_2 \cdots X_n}$ są zbieżne prawie na pewno? Jeśli tak, to znajdź ich granicę.
4. Załóżmy, że $X_0, X_1, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, a R jest promieniem zbieżności losowego szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} X_n z^n$. Wykaż, że istnieje $r \in [0,\infty]$ takie, że $\mathbf{P}(R=r)=1$.
5. Zmienne X i Y są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem 3. Oblicz $\mathbf{E}((X+Y)^2|X)$ oraz $\mathbf{E}(X|(X+Y)^2)$.
6. Udowodnij, że jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$, $Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$, to dla dowolnej funkcji ciągłej $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} f(X,Y)$.

Część testowa

1. (4pkt) Uzupełnij tekst: 9 jednakowych cukierków można podzielić między 4 chłopców na .... sposobów. Prawdopodobieństwo, że przy losowym podziale pierwszy z chłopców nie dostanie żadnego cukierka wynosi .... Przy losowym podziale pierwszy z chłopców dostanie średnio .... cuk.
2. (4pkt) Niezależne zmienne losowe X i Y mają rozkład Poissona z parametrem 2. Oblicz
   $\mathrm{Var}(X+4Y) =$
   $\mathbf{P}(X>0, Y>0) =$
   $\mathbf{P}(X+Y=8) =$.
3. (3pkt) Zmienne losowe X i Y są niezależne, symetryczne i ograniczone. Wynika stąd, że (podkreśl prawidłowe odpowiedzi): $\mathbf{P}(X>1|Y) = \mathbf{P}(X>1)$ p.n.;
   $\mathbf{E}XY = 0$; $\mathbf{E}(XY|\mathcal{G}) = \mathbf{E}(X|\mathcal{G})\mathbf{E}(Y|\mathcal{G})$ dla dowolnego sigma ciała $\mathcal{G}$;
   $\mathbf{E}|X+Y| \geqslant \mathbf{E}|X|$.
4. (4pkt) Zmienna X ma rozkład normalny ze średnią 0 i wariancją 3. Znajdź gęstość zmiennej $Y=\sqrt{|X|}$, $g_Y(x) =$

5. (3pkt) Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają jednakowy rozkład, zaś $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Który z poniższych warunków implikuje $\mathbf{E}|X_1| < \infty$? (podkreśl prawidłowe odpowiedzi) $\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{n} < \infty$ p.n.; $\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} < \infty$ p.n. $\frac{S_n}{n} \to 0$ p.n.; $\frac{S_n}{n} \to 0$ według prawdopodobieństwa.

6. (2pkt) Podaj definicję $\limsup A_n =$

7. (4pkt) W pewnej skarbonce jest 50 monet - 49 normalnych i 1 sfałszowana mająca po obu stronach orły. Ze skarbonki wylosowano monetę i rzucono nią 6 razy za każdym razem wyrzucając orła. Prawdopodobieństwo, że wylosowana moneta jest sfałszowana wynosi ....

8. (4pkt) Niech $X = \mathbf{P}(A|\mathcal{G})$ oraz $B \in \mathcal{G}$. Wówczas $\mathbf{E}X =$.........., $\mathbf{E}X1_B =$ .... oraz $\mathbf{P}(A \cap B|\mathcal{G}) =$ ....

9. (3pkt) Zmienne losowa X ma dystrybuantę F. Oblicz
$\mathbf{P}(X = a) =$
$\mathbf{P}(a < X < b) =$

10. (4pkt) Sformułuj obie części Lematu Borella-Cantelliego.