Imię i nazwisko:... Numer indeksu:........................

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa I*, grupa I, 26 czerwca 2023

Część zadaniowa (40pkt)

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania na osobnych kartkach podpisanych imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy (grupa I) i zadania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–8 pkt. Można (i warto) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach. Odpowiedzi proszę podawać w jak najprostszej postaci, nie zawierającej nieskończonej liczby operacji arytmetycznych.

1. Rzucano kostką do momentu wypadnięcia pierwszej szóstki oraz monetą do wypadnięcia pierwszego orła. Kostka i moneta są symetryczne, rzuty są wykonywane w sposób niezależny. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
   i) na kostce wyrzucono przynajmniej jedną piątkę,
   ii) wykonano więcej rzutów kostką niż monetą,
   iii) monetą rzucono więcej niż dwa razy, jeśli wiemy, że rzutów kostką było więcej niż rzutów monetą.

2. Liczba klientów dokonujących w poniedziałek zakupów w pewnym sklepie internetowym ma rozkład Poissona ze średnią 20. Kwota zakupów pojedynczego klienta jest zmienną losową o średniej 80 i odchyleniu standardowym 100. Zakładamy, że zakupy są wykonywane niezależnie, a kwota każdego z nich nie zależy od liczby kupujących. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję łącznej kwoty poniedziałkowych zakupów w rozważanym sklepie.

3. Niezależne zmienne losowe X_1, X_2, X_3 mają rozkład jednostajny na odcinku $[0, 2]$. Czy zmienne $Y_1 = \max(X_1, X_2)$, $Y_2 = \max(X_1, X_2) + X_3$ mają gęstości? Jeśli tak, to ile one wynoszą?

4. Zmienne X i Y są niezależne i mają rozkład wykładniczy o średniej 6. Wykaż, że zmienne $W = X + Y$ i $Z = X/(X + Y)$ są niezależne. Jaki rozkład mają te zmienne?

5. Zmienne $X_1, X_2, X_3, \ldots$ są niezależne i mają rozkład gaussowski o średniej 0 i wariancji 1. Zbadaj zbieżność ciagu $M_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ prawie na pewno, według prawdopodobieństwa, w L^1 i w L^2.

6. Wektor losowy (X, Y) ma rozkład jednostajny na kwadracie $|x| + |y| \leqslant 7$. Oblicz $\mathbb{P}(Y \leqslant t|X)$ dla $t \in \mathbb{R}$ oraz $\mathbb{E}(X^k|Y)$ dla $k = 1, 2, \ldots$.

Część testowa (20pkt)

1. (2pkt) Podaj definicję warunkowej wartości oczekiwanej zmiennej losowej X względem sigma-ciała $\mathcal{G}$.

2. (3pkt) Niezależne zmienne losowe X, Y mają rozkład Poissona z parametrem 4. Oblicz
i) $\mathbb{P}(X+Y=7) =$
ii) $\mathbb{P}(XY>0) =$
iii) $\mathrm{Var}(3X-Y) =$

3. (2pkt) Niech π będzie losową permutacją zbioru $\{1,\ldots,20\}$. Wówczas
i) $\mathbb{P}(\pi$ nie ma elementu stałego$) =$
ii) $\mathbb{P}(\pi(1)<\pi(2)|\pi(2)<\pi(3)) =$

4. (3pkt) Zmienne losowe X,Y,Z są niezależne i mają rozkład normalny o sredniej -1 i wariancji 2. Wówczas
i) zmienna $X+Y-2Z$ ma gęstość $g(x) =$
ii) $\mathbb{E}(X+Y-2Z)^3 =$
iii)$\mathbb{E}(X+Y-2Z)^4 =$

5. (3pkt) Nieujemna zmienna losowa X ma dystrybuantę F. Wówczas
i) $\mathbb{P}(X=1) =$
ii) $\mathbb{P}(X>5|X>2) =$
iii) $\mathbb{E}X =$

6. (3pkt) Zmienne X_1,X_2,X_3 są niezależne i mają rozkład jednostajny na $[1,5]$. Oblicz
i) $\mathbb{E}(X_1X_2+X_2X_3|X_1) =$
ii) $\mathbb{E}(X_1|X_1+X_2+X_3) =$
iii) $\mathbb{P}(X_1>X_2|X_3) =$

7. (2pkt) Z urny zawierającej 2 kule białe i 3 czarne losujemy ze zwracaniem po jednej kuli. Niech S_n oznacza liczbę wylosowanych kul białych. Dla liczby rzeczywistej t oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \geqslant \frac{2}{5}n + t\sqrt{n}) =$$

8. (2pkt) Sformułuj twierdzenie Kołmogorowa o trzech szeregach.

Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:.......................

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa I*, grupa II, 26 czerwca 2023

Część zadaniowa (40pkt)

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania na osobnych kartkach podpisanych imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy (grupa II) i zadania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–8 pkt. Można (i warto) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach. Odpowiedzi proszę podawać w jak najprostszej postaci, nie zawierającej nieskończonej liczby operacji arytmetycznych.

1. Rzucano kostką do momentu wypadnięcia pierwszej szóstki oraz monetą do wypadnięcia pierwszego orła. Kostka i moneta są symetryczne, rzuty są wykonywane w sposób niezależny. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
   i) wykonano więcej rzutów monetą niż kostką,
   ii) kostką rzucono więcej niż dwa razy, jeśli wiemy, że rzutów monetą było więcej niż rzutów kostką,
   iii) na kostce wyrzucono przynajmniej raz nieparzystą liczbę oczek.

2. Liczba klientów dokonujących w poniedziałek zakupów w pewnym sklepie internetowym ma rozkład Poissona ze średnią 15. Kwota zakupów pojedynczego klienta jest zmienną losową o średniej 100 i odchyleniu standardowym 200. Zakładamy, że zakupy są wykonywane niezależnie, a kwota każdego z nich nie zależy od liczby kupujących. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję łącznej kwoty poniedziałkowych zakupów w rozważanym sklepie.

3. Niezależne zmienne losowe X_1, X_2, X_3 mają rozkład jednostajny na odcinku $[0, 5]$. Czy zmienne $Y_1 = \max(X_1, X_2)$, $Y_2 = \max(X_1, X_2) + X_3$ mają gęstości? Jeśli tak, to ile one wynoszą?

4. Zmienne X i Y są niezależne i mają rozkład wykładniczy o średniej 5. Wykaż, że zmienne $W = X + Y$ i $Z = X/(X + Y)$ są niezależne. Jaki rozkład mają te zmienne?

5. Zmienne $X_1, X_2, X_3, \ldots$ są niezależne i mają rozkład gaussowski o średniej 0 i wariancji 1. Zbadaj zbieżność ciagu $M_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ według prawdopodobieństwa, prawie na pewno, w L^1 i w L^2.

6. Wektor losowy (X, Y) ma rozkład jednostajny na kwadracie $|x| + |y| \leqslant 10$. Oblicz $\mathbb{E}(X^k|Y)$ dla $k = 1, 2, \ldots$ oraz $\mathbb{P}(X \leqslant t|Y)$ dla $t \in \mathbb{R}$.

Część testowa (20pkt)

1. (2pkt) Sformułuj twierdzenie Kołmogorowa o trzech szeregach.

2. (3pkt) Zmienne losowe X, Y, Z są niezależne i mają rozkład normalny o sredniej 1 i wariancji 3. Wówczas
i) zmienna $X + 2Y - 3Z$ ma gęstość $g(x) =$
ii) $\mathbb{E}(X + 2Y - 3Z)^3 =$
iii)$\mathbb{E}(X + 2Y - 3Z)^4 =$

3. (2pkt) Z urny zawierającej 3 kule białe i 5 czarnych losujemy ze zwracaniem po jednej kuli. Niech S_n oznacza liczbę wylosowanych kul czarnych. Dla liczby rzeczywistej t oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \geqslant \frac{5}{8}n + t\sqrt{n}) =$$

4. (3pkt) Nieujemna zmienna losowa X ma dystrybuantę F. Wówczas
i) $\mathbb{E}X =$
ii) $\mathbb{P}(X = 2) =$
iii) $\mathbb{P}(X > 4|X > 3) =$

5. (3pkt) Niezależne zmienne losowe X, Y mają rozkład Poissona z parametrem 3. Oblicz
i) $\mathrm{Var}(X - 5Y) =$
ii) $\mathbb{P}(X + Y = 6) =$
iii) $\mathbb{P}(XY > 0) =$

6. (2pkt) Niech π będzie losową permutacją zbioru $\{1, \ldots, 15\}$. Wówczas
i) $\mathbb{P}(\pi(1) < \pi(3))|\pi(2) < \pi(3)) =$
ii) $\mathbb{P}(\pi$ nie ma elementu stałego$) =$

7. (3pkt) Zmienne X_1, X_2, X_3 są niezależne i mają rozkład jednostajny na $[1, 5]$. Oblicz
i) $\mathbb{E}(X_1X_2 - X_2X_3|X_3) =$
ii) $\mathbb{E}(X_1|X_1 + X_2 + X_3) =$
iii) $\mathbb{P}(X_1 < X_2|X_3) =$

8. (2pkt) Podaj definicję warunkowej wartości oczekiwanej zmiennej losowej X względem sigma-ciała $\mathcal{G}$.