Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:.......................

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa I*, grupa I, 15 czerwca 2019

Część zadaniowa (35pkt)

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania na osobnych kartkach podpisanych imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy (grupa I) i zadania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–7 pkt. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach. Odpowiedzi proszę podawać w jak najprostszej postaci, nie zawierającej nieskończonej liczby operacji arytmetycznych.

1. Zmienne losowe N oraz $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym N ma rozkład Poissona z parametrem 2, a X_i rozkład gaussowski o średniej -5 i wariancji 1. Niech $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ ($S = 0$ dla $N = 0$). Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję S.

2. W woreczku znajduje się 8 prawidłowych kostek i 1 kostka sfałszowana, która ma szóstki na dwóch bokach. Powtarzamy następujące doświadczenie: wyciągamy kostkę, rzucamy nią i zwracamy do woreczka. Gra się kończy, gdy wyrzucimy trzecią szóstkę.
i) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że gra się skończy w 9 rzucie.
ii) Gra się skończyła w 9 rzucie. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że któryś z rzutów był wykonany sfałszowaną kostką?

3. Zmienne X i Y są niezależne, przy czym X ma rozkład jednostajny na przedziale $[1/3, 4/3]$, a Y geometryczny z parametrem $p = 2/3$.
i) Znajdź dystrybuantę zmiennej $X + Y$.
ii) Czy zmienna $\sqrt{X+Y}$ ma gęstość, a jeśli tak, to ile ona wynosi?

4. Niech $X, X_1, X_2, ...$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie. Udowodnij, że ciąg zmiennych losowych $Y_n = \max(|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_n|)$ jest zbieżny prawie na pewno do $\|X\|_\infty$.

5. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na $[0, 6]$. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste α_1 i α_2 dla których zbieżne z prawdopodobieństwem 1 są szeregi losowe
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha_1}(X_n - 3), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha_2} X_n.$$

6. Zmienne X i Y są niezależne o jednakowym rozkładzie z dystrybuantą F. Wykaż, że
$$\mathbb{E}|X - Y| = 2\int_{-\infty}^{\infty} F(t)(1 - F(t))dt.$$

Część testowa (25pkt)

1. (2pkt) sformułuj prawo 0-1 Kołmogorowa

2. (4pkt) Wektor (X, Y, Z) ma gęstość jednostajną na zbiorze $|x| + |y| + |z| \leqslant 5$. Oblicz
   i) $\mathbb{P}(X > Y) =$
   ii) $\mathrm{Cov}(X, Y) =$
   iii) gęstość zmiennej X, $g_X =$

3. (3pkt) Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem 5. W zależności od $\alpha \in \mathbb{R}$ oblicz
$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2)^\alpha} = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$$
   W jakim sensie zachodzi powyższa zbieżność?

4. (3pkt) Sformułuj obie części lematu Borela-Cantelliego

5. (4pkt) Zmienne X, Y, Z są niezależne o rozkładzie normalnym o średniej 2 i wariancji 3. Oblicz
   i) $\mathbb{E}((X + 3Y)^2|Y) =$
   iii) $\mathbb{E}(X + 3Y|Y + Z) =$
   i) $\mathbb{P}(X < Y|Z) =$

6. (3pkt) Prawdopodobieństwo tego, że w 900 losowaniach totolotka (6 cyfr z 49) liczba 1 zostanie wylosowana więcej niż 110 razy można przybliżyć przez $\Phi(x)$ z $x =$..................

7. (4pkt) Podaj liczbę funkcji ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 8\}$ w $\{1, 2, \ldots, 15\}$, które są
   i) niemalejące

   ii) różnowartościowe

   iii) przyjmują obie wartości 1 i 2.

8. (2pkt) Podaj definicje λ-układu podzbiorów Ω.

Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:.......................

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa I*, grupa II, 15 czerwca 2019

Część zadaniowa (35pkt)

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania na osobnych kartkach podpisanych imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy (grupa II) i zadania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–7 pkt. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach. Odpowiedzi proszę podawać w jak najprostszej postaci, nie zawierającej nieskończonej liczby operacji arytmetycznych.

1. W woreczku znajduje się 9 prawidłowych kostek i 1 kostka sfałszowana, która ma szóstki na dwóch bokach. Powtarzamy następujące doświadczenie: wyciągamy kostkę, rzucamy nią i zwracamy do woreczka. Gra się kończy, gdy wyrzucimy trzecią szóstkę.
   i) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że gra się skończy w 10 rzucie.
   ii) Gra się skończyła w 10 rzucie. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że któryś z rzutów był wykonany sfałszowaną kostką?

2. Zmienne X i Y są niezależne, przy czym X ma rozkład jednostajny na przedziale $[1/2, 3/2]$, a Y geometryczny z parametrem $p = 4/5$.
   i) Znajdź dystrybuantę zmiennej $X + Y$.
   ii) Czy zmienna $\sqrt{X+Y}$ ma gęstość, a jeśli tak, to ile ona wynosi?

3. Zmienne X i Y są niezależne o jednakowym rozkładzie z dystrybuantą F. Wykaż, że
$$\mathbb{E}|X - Y| = 2\int_{-\infty}^{\infty} F(t)(1 - F(t))dt.$$

4. Zmienne losowe N oraz $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym N ma rozkład Poissona z parametrem 5, a X_i rozkład gaussowski o średniej 1 i wariancji 2. Niech $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ ($S = 0$ dla $N = 0$). Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję S.

5. Niech $X, X_1, X_2, ...$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie. Udowodnij, że ciąg zmiennych losowych $Y_n = \max(|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_n|)$ jest zbieżny prawie na pewno do $\|X\|_\infty$.

6. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na $[0, 4]$. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste α_1 i α_2 dla których zbieżne z prawdopodobieństwem 1 są szeregi losowe
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha_1} X_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha_2}(X_n - 2).$$

Część testowa (25pkt)

1. (2pkt) Podaj definicje λ-układu podzbiorów Ω.

2. (2pkt) sformułuj prawo 0-1 Kołmogorowa

3. (4pkt) Podaj liczbę funkcji ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 7\}$ w $\{1, 2, \ldots, 10\}$, które są
   i) różnowartościowe

   ii) niemalejące

   iii) przyjmują obie wartości 1 i 2.

4. (4pkt) Zmienne X, Y, Z są niezależne o rozkładzie normalnym o średniej 1 i wariancji 5. Oblicz
   i) $\mathbb{P}(X > Y|Z) =$
   ii) $\mathbb{E}((X + 5Y)^2|Y) =$
   iii) $\mathbb{E}(X + 5Y|Y + Z) =$

5. (3pkt) Prawdopodobieństwo tego, że w 400 losowaniach totolotka (6 cyfr z 49) liczba 1 zostanie wylosowana więcej niż 50 razy można przybliżyć przez $\Phi(x)$ z $x =$.................

6. (3pkt) Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem 2. W zależności od $\alpha \in \mathbb{R}$ oblicz
$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}{(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^\alpha} = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$$
   W jakim sensie zachodzi powyższa zbieżność?

7. (4pkt) Wektor (X, Y, Z) ma gęstość jednostajną na zbiorze $|x| + |y| + |z| \leqslant 2$. Oblicz
   i) gęstość zmiennej X, $g_X =$
   ii) $\mathbb{P}(X > Y) =$
   iii) $\mathrm{Cov}(X, Y) =$

8. (3pkt) Sformułuj obie części lematu Borela-Cantelliego