Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:........................

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa I*
grupa I, 21 czerwca 2012

Część zadaniowa

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązanie na osobnej kartce podpisanej imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy i zadania.. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–8 pkt.

1. Każdą z krawędzi grafu pełnego o 40 wierzchołkach pomalowano z równym prawdopodobieństwem jednym z trzech kolorów. Zakładając, że krawędzie zostały pomalowane w sposób niezależny, oblicz wartość oczekiwaną i wariancję liczby zawartych w pomalowanym grafie trójkątów o trzech bokach różnego koloru.

2. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 1. Zbadaj zbieżność prawie na pewno następujących zmiennych losowych:
   i) $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2}$,
   ii) $\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$,
   iii) $X_n^{1/n}$.

3. Zmienne X, Y, Z są niezależne i mają rozkład jednostajny na przedziale $[1, 5]$. Oblicz $\mathbb{E}((X+Y)^2|Z)$, $\mathbb{E}((X+Y)^2|X)$, $\mathbb{P}(X \leqslant Y|X)$ oraz $\mathbb{E}(X+Z|(X+Y)^2)$.

4. Zmienne ε, X i Y są niezależne, przy czym $\mathbb{P}(\varepsilon = \pm 1) = 1/2$, zaś X i Y mają rozkład jednostajny na $[0, 3]$. Znajdź rozkład zmiennych $\sqrt[3]{X}$, $\varepsilon\sqrt[3]{X}$ oraz $\sqrt[3]{X} + \sqrt[3]{Y}$.

5. Zmienne X, Y są niezależne i mają standardowy rozkład gaussowski $\mathcal{N}(0, 1)$. Wykaż, że zmienne $X^2 + Y^2$ oraz $|X|/|Y|$ są niezależne.

6. W urnie znajduje się 6 kul białych i 5 czerwonych. Losujemy z urny kolejno po jednej kuli, a następnie po i-tym losowaniu zwracamy do urny wylosowaną kulę oraz i kul w tym samym kolorze.
   a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że n-ta wylosowana kula będzie biała.
   b) Za czwartym razem wylosowaliśmy kulę białą, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pierwsza wylosowana kula była czerwona?

Część testowa

1. (5pkt) $(N_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Poissona z intensywnością λ. Oblicz
   i) $\mathbb{P}(2 \leqslant N_1 < N_2 = N_4) =$
   ii) $\mathrm{Var}(2N_2 + 3N_3) =$
   iii) $\mathbb{E}e^{N_1+N_3-N_2} =$

2. (3pkt) Podaj definicję λ-układu i sformułuj twierdzenie o π i λ-układach.

3. (4pkt) Zmienne X_i są niezależne oraz mają gęstość $g_\alpha(x) = C_\alpha \frac{\ln^\alpha(1+|x|)}{1+|x|^2}$, gdzie C_α jest pewną stałą. Wówczas
   a) $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} \to 0$ według prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in$..........
   b) $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} \to 0$ p.n. wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in$..........

4. (4pkt) Zmienne X, Y, Z są niezależne i mają rozkład normalny o średniej 1 i wariancji 2. Wówczas
   a) Zmienna $2X - Y + 3Z$ ma gęstość .....

   b) $\mathbb{E}(2X + Y - 3Z)^3 =$ ...., $\mathbb{E}(2X + Y - 3Z)^4 =$ ....

5. (2pkt) Podaj definicję warunkowej wartości oczekiwanej $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.

6. (3pkt) Na mocy twierdzenia de Moivre'a-Laplace'a przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w 200 rzutach kostką wypadnie co najmniej 30 szóstek wynosi $\Phi(x)$ gdzie $x =$ ....

7. (3pkt) Niech π będzie losową permutacją zbioru $\{1, \ldots, 20\}$. Oblicz
   a) $\mathbb{P}(\pi$ nie ma punktu stałego$) =$
   b) $\mathbb{P}(\pi(1) < \pi(7) < \pi(9)) =$.

8. (3pkt) Nieujemna zmienna losowa X ma dystrybuantę F. Wówczas
   a) $\mathbb{P}(X = 1) =$
   b) $\mathbb{P}(1 < X < 2) =$
   c) $\mathbb{E}X =$

9. (3pkt) Sformułuj twierdzenie Kołmogorowa o trzech szeregach.

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa I*
grupa II, 21 czerwca 2012

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązanie na osobnej kartce podpisanej imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy i zadania.. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–8 pkt.

Część zadaniowa

1. Zmienne ε, X i Y są niezależne, przy czym $\mathbb{P}(\varepsilon = \pm 1) = 1/2$, zaś X i Y mają rozkład jednostajny na $[0,5]$. Znajdź rozkład zmiennych $\sqrt[3]{X}$, $\varepsilon\sqrt[3]{X}$ oraz $\sqrt[3]{X} + \sqrt[3]{Y}$.

2. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 1. Zbadaj zbieżność prawie na pewno następujących zmiennych losowych:
   i) $\frac{X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2}{X_1+X_2+\ldots+X_n}$,
   ii) $\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$,
   iii) $X_n^{1/n}$.

3. W urnie znajduje się 7 kul białych i 8 czerwonych. Losujemy z urny kolejno po jednej kuli, a następnie po i-tym losowaniu zwracamy do urny wylosowaną kulę oraz i kul w tym samym kolorze.
   a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że n-ta wylosowana kula będzie biała.
   b) Za czwartym razem wylosowaliśmy kulę białą, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pierwsza wylosowana kula była czerwona?

4. Zmienne X, Y są niezależne i mają standardowy rozkład gaussowski $\mathcal{N}(0,1)$. Wykaż, że zmienne $X^2 + Y^2$ oraz $|X|/|Y|$ są niezależne.

5. Każdą z krawędzi grafu pełnego o 40 wierzchołkach pomalowano z równym prawdopodobieństwem jednym z trzech kolorów. Zakładając, że krawędzie zostały pomalowane w sposób niezależny, oblicz wartość oczekiwaną i wariancję liczby zawartych w pomalowanym grafie trójkątów o trzech bokach różnego koloru.

6. Zmienne X, Y, Z są niezależne i mają rozkład jednostajny na przedziale $[1,3]$. Oblicz $\mathbb{E}((X+Y)^2|Z)$, $\mathbb{E}((X+Y)^2|Y)$, $\mathbb{P}(X \leqslant Y|Y)$ oraz $\mathbb{E}(X+Z|(X+Y)^2)$.

Część testowa

1. (3pkt) Nieujemna zmienna losowa X ma dystrybuantę F. Wówczas
   a) $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 4) =$
   b) $\mathbb{P}(X = 2) =$
   c) $\mathbb{E}X =$

2. (3pkt) Sformułuj twierdzenie Kołmogorowa o trzech szeregach.

3. (5pkt) $(N_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Poissona z intensywnością λ. Oblicz
   i) $\mathbb{P}(1 < N_2 = N_3 < N_4) =$
   ii) $\mathrm{Var}(N_3 + 4N_5) =$
   iii) $\mathbb{E}e^{N_2+N_5-N_3} =$

4. (3pkt) Na mocy twierdzenia de Moivre'a-Laplace'a przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w 250 rzutach kostką wypadnie co najmniej 40 szóstek wynosi $\Phi(x)$ gdzie $x =$ ....

5. (3pkt) Niech π będzie losową permutacją zbioru $\{1,\ldots,20\}$. Oblicz
   b) $\mathbb{P}(\pi(1) > \pi(3) > \pi(5)) =$
   a) $\mathbb{P}(\pi$ nie ma punktu stałego$) =$

6. (4pkt) Zmienne X_i są niezależne oraz mają gęstość $g_\alpha(x) = C_\alpha \frac{\ln^\alpha(1+|x|)}{1+|x|^2}$, gdzie C_α jest pewną stałą. Wówczas
   b) $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} \to 0$ p.n. wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in$..........
   a) $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} \to 0$ według prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in$..........

7. (2pkt) Podaj definicję warunkowej wartości oczekiwanej $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.

8. (4pkt) Zmienne X, Y, Z są niezależne i mają rozkład normalny o średniej 2 i wariancji 4. Wówczas
   a) Zmienna $X - 2Y + 3Z$ ma gęstość .....

   b) $\mathbb{E}(X + 2Y - 3Z)^3 =$ ...., $\mathbb{E}(X + 2Y - 3Z)^4 =$ ....

9. (3pkt) Podaj definicję λ-układu i sformułuj twierdzenie o π i λ-układach.