Imię i nazwisko:... Numer indeksu:.........................

Część zadaniowa

1. (10 pkt) Przestrzenią stanów łańcucha Markowa (X_n) jest zbiór $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Macierz przejścia tego łańcucha wynosi

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Załóżmy, że $X_0 = 1$ p.n.
(a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że łańcuch będzie w stanie 4 wcześniej niż w stanie 3?
(b) Obliczyć średni czas oczekiwania na dojście łańcucha do stanu 4.

2. (10pkt) W czasie szczytu liczba rozmów łączona przez pewną centralę telefoniczną w ciągu godziny ma rozkład Poissona ze średnią 150. Zakładając niezależność liczby łączonych rozmów w różnych godzinach oszacuj prawdopodobieństwo, że centrala połączy w ciągu 200 kolejnych godzin szczytu między 29 a 30 tysiące rozmów.

3. (10pkt) Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[-2, 2]$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Znajdź ciąg a_n taki, że $(e^{S_n + a_n}, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem. Czy ten martyngał jest zbieżny prawie na pewno?

Część testowa

W poniższych zadaniach φ_X oznacza funkcję charakterystyczną zmiennej losowej X.

1. (3pkt) Podaj jedną z wersji twierdzenia ergodycznego dla łańcucha Markowa o skończonej przestrzeni stanów.

2. (4pkt) Zmienna losowa X spelnia warunki $\mathbf{E}X = -1$, $\mathrm{Var}(X) = 5$. Wówczas $\varphi_X(0) =$, $\varphi'_X(0) =$, $\varphi''_X(0) =$

3. (4pkt) Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem 3. Oblicz funkcję charakterystyczną $2X - Y$, $\varphi_{2X-Y} =$

4. (4pkt) Uzupełnij stwierdzenie: Niech μ_λ będzie rozkładem wykładniczym z parametrem λ, zaś $A \subset (0, \infty)$, wówczas rodzina $(\mu_\lambda)_{\lambda \in A}$ jest ciasna wtedy i tylko wtedy gdy

5. (4pkt) Zmienne σ i τ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Wówczas następujące zmienne muszą być momentami zatrzymania (podkreśl właściwe odpowiedzi): $(\sigma - 2) \vee \tau$, $\tau \wedge (\sigma + 1)$, τ^2, $\tau + \sigma$.

6. (3pkt) Co to znaczy, że wektor losowy $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ma rozkład gaussowski (podaj jedną z definicji)?

7. (4pkt) Które z następujących warunków implikują jednostajną całkowalność martyngału X_n (podkreśl właściwe odpowiedzi): zbieżność X_n w L^1, zbieżność X_n w L^2, zbieżność prawie na pewno X_n, $\sup_n \mathbf{E}|X_n| < \infty$.

8. (4pkt) Sformułuj Centralne Twierdzenie Graniczne w wersji Lindeberga.