Egzamin z rachunku prawdopodobieństwa, 22 stycznia 2001.

I. Część testowa — należy napisać wyłącznie odpowiedź.

1. Rzucono 7 razy kostką. Ile średnio „szóstek" otrzymano w dwóch pierwszych rzutach, jeśli wiadomo, że wypadły cztery „szóstki"?

2. Zmienna losowa X_n ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1 - 1/n]$, $n = 2, 3, \ldots$. Wyznaczyć $\lim_{n\to\infty} P(X_n \in [1/3, 2/3])$.

3. X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z parametrem 1. Obliczyć a) $E((X+Y)^2|X)$; b) $E(X|(X+Y)^2)$.

4. φ_1, φ_2 są funkcjami charakterystycznymi. Czy poniższe funkcje są zawsze funkcjami charakterystycznymi?

a) $\varphi_1\varphi_2$; b) $\varphi_1 + \varphi_2$; c) $\frac{1}{3}\varphi_1 + \frac{2}{3}\varphi_2$; d) $e^{it}\varphi_1(-3t)$.

5. Czas obsługi przy kasie w supermarkecie ma rozkład wykładniczy o średniej 5 (minut). Oszacować prawdopodobieństwo, że łączny czas obsługi 100 klientów przekroczy 9 godzin. Czasy obsługi poszczególnych klientów są niezależne.

6. Proces $(X_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem. Czy wynika stąd, że dla $n = 2, 3, \ldots$:

a) $EX_n = EX_1$;

b) $EX_n 1_{\{X_n \geq 0\}} = EX_1 1_{\{X_1 \geq 0\}}$;

c) $EX_n 1_{\{X_1 \geq 0\}} = EX_1 1_{\{X_1 \geq 0\}}$.

7. Zmienne losowe X_i są niezależne i mają rozkład jednostajny na $[0, 1]$. Wyznaczyć $E\tau$, gdzie $\tau = \inf\{n : X_1 + \ldots + X_n \geq 1\}$.

8. Rzucamy kostką do chwili otrzymania wszystkich parzystych wyników. Jaka jest wartość średnia sumy wyrzuconych oczek?

9. Dane są momenty stopu τ i σ. Które ze zdarzeń należą do $\mathcal{F}_\tau$? Do $\mathcal{F}_\sigma$?

a) $\{\tau < \sigma\}$; b) $\{\tau \leq \sigma\}$; c) $\{\tau = \sigma\}$.

W trzech następnych zadaniach W_t, V_t, $t \geq 0$ są niezależnymi procesami Wienera.

10. Obliczyć Ee^{isW_t}.

11. Obliczyć funkcję kowariancji procesu $W_t - tW_1$.

12. Podać warunek konieczny i dostateczny na to, by proces $aW_t + bV_t$ był procesem Wienera.

II. Część teoretyczna — wymagane jest pełne rozwiązanie z uzasadnieniem.

T1. Wykazać, że rodzina rozkładów wykładniczych ze średnimi $(\lambda_t)_{t\in T}$ jest jędrna wtedy i tylko wtedy, gdy $\sup_{t\in T} \lambda_t < \infty$.

T2. Wykazać, że jeśli $X_n \to X$ według rozkładu, $a_n \to a$, $b_n \to b$, to $a_n X_n + b_n \to aX + b$ według rozkładu.

T3. Proces $(X_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem, $D_n = X_{n+1} - X_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Wykazać, że jeśli zmienne losowe D_n są ograniczone, to są nieskorelowane.