Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa

22 stycznia 2000

1. Zmienne X_n przyjmują wartości w przedziale [0.1] oraz $\lim_{n\to 0} EX_n^k = \frac{1}{k+1}$ dla $k = 0.1, \ldots$. Udowodnij, że $\lim_{n\to\infty} P(a \leq X_n \leq b) = b - a$ dla wszystkich $0 \leq a \leq b \leq 1$.

2. Zmienna losowa X ma funkcję charakterystyczną φ. Udowodnij, że φ jest okresowa z okresem $t_0 > 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $P(X \in \frac{2\pi}{t_0} Z) = 1$.

3. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie takim, że $EX_i = 0$, $EX_i^2 = \sigma^2$. Udowodnij, że dla dowolnej funkcji $f : R \to R$ różniczkowalnej w 0

$$\sqrt{n}(f(\frac{S_n}{n}) - f(0)) \to \mathcal{N}(0, \sigma^2(f'(0))^2) \text{ według rozkładu,}$$

gdzie jak zwykle $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

4. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o rozkładzie jednostajnym na $[0, 2]$. Udowodnij, że zmienne $M_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ są zbieżne p.n.p., ale nie w L^1.

5. Rzucamy kostką dopóki nie zostaną wyrzucone wszystkie możliwe liczby oczek. Oblicz wartość oczekiwaną
a) liczby oddanych rzutów
b) sumy wyrzuconych oczek.

6. Rozpatrzmy łańcuch Markowa na zbiorze liczb całkowitych z macierzą przejścia $P = (p_{xy})$ daną wzorem

$$p_{0,k} = \frac{1}{3} \text{ dla } k = -1, 0, 1,$$

$$p_{k,k-1} = q, p_{k,k+1} = p \text{ dla } k \leq -1,$$

$$p_{k,k-1} = p, p_{k,k+1} = q \text{ dla } k \geq 1,$$

gdzie $q = 1 - p$ oraz $p \in (0, 1)$. Wykaż, że łańcuch jest nieprzywiedlny i nieokresowy. Dla jakich wartości p, łańcuch ten jest powracalny?

7. Niech $(W_t)_{t\geq 0}$ będzie procesem Wienera, zaś $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s : s \leq t)$. Znajdź funkcje $f : [0, \infty) \to R$ taką, że

$$(e^{iW_t + f(t)}, \mathcal{F}_t) \text{ jest martyngałem.}$$

Wszystkie zadania będą oceniane w skali 0-10, do otrzymania oceny bardzo dobrej wystarczy poprawne rozwiązanie 6 zadań.