Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa

13 czerwca 2000

1. Symetryczną kostką do gry rzucono pięć razy. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyrzucona suma oczek:
   a) jest równa 10
   b) jest parzysta
   c) jest parzysta, jeśli wiadomo, że iloczyn wyrzuconych oczek jest parzysty.

2. Udowodnij, że dla dowolnej zmiennej losowej X
$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) \leq E|X| \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(|X| \geq n).$$

3. Zmienne losowe X, Y, ε są niezależne przy czym X i Y mają rozkład jednostajny na $[0,1]$, a $P(\varepsilon = \pm 1) = 1/2$. Czy zmienne $\varepsilon\sqrt{X}$ i $\sqrt{X} + \sqrt{Y}$ mają rozkład ciągły? Jeśli tak to znajdź ich gęstość.

4. Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne o wspólnym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0,1)$, zaś $a_1, \ldots, a_n$ jest ciągiem liczb rzeczywistych. Dla jakich t
$$f(t) = E\exp((t\sum_{i=1}^{n} a_i X_i)^2) < \infty?$$
   Oblicz $f(t)$.

5. Wykaż, że dla dowolnych rzeczywistych zmiennych losowych X_n, X oraz,Y_n, Y , jeśli $X_n \xrightarrow{P} X$ i $Y_n \xrightarrow{P} Y$ to $X_n Y_n \xrightarrow{P} XY$.

6. Zmienne X i Y są niezależne o rozkładzie eksponencjalnym z parametrem 1. Oblicz $E(X+Y|X), E(XY|X)$ i $E(X|X+Y)$.

7. Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$ o jednakowym rozkładzie Poissona z parametrem 2. Udowodnij, że ciąg
$$\frac{X_1^2 X_2 + X_2^2 X_3 + \ldots + X_n^2 X_{n+1}}{n}$$
   jest zbieżny prawie na pewno i znajdź jego granicę.

8. Nauczyciel codziennie na lekcji pyta losowo wybranego ucznia z 20 osobowej klasy. Kolejne wybory są od siebie niezależne. Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję liczby osób przepytanych przynajmniej raz w ciągu 20 lekcji.

9. Nieujemne zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie takim, że $EX_i = 1$ oraz $P(X_i = 1) < 1$. Udowodnij, że $X_1 X_2 \cdots X_n \to 0$ p.w.

Wszystkie zadania będą oceniane w skali 0-10, do otrzymania oceny bardzo dobrej wystarczy poprawne rozwiązanie 7 zadań.