Zadania zaliczeniowe

1. Niech $(W_t)_{t\geq 0}$ będzie ruchem Browna startującym z zera, rozpatrzmy następujące trzy procesy
a) $e^{-2t}W_{e^t}$, $t \in (-\infty, \infty)$
b) $W_{t+1} - W_t$, $t \geq 0$
c) $tW_{1/t}$, $t > 0$.
Znajdź funkcję wartości średniej i kowariancji dla tych procesów. Które z tych procesów są stacjonarne, a które mają przyrosty niezależne?

2. Ustalmy $T > 0$ i liczby rzeczywiste a, b. Proces gaussowski $(X_t)_{t\in[0,T]}$ nazywamy mostem Browna z a do b jeśli $EX_t = a(1 - \frac{t}{T}) + b\frac{t}{T}$ oraz $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \min(s,t) - \frac{st}{T}$ (zakładamy, że wiadomo, iż taki proces itnieje)
a) udowodnij, że istnieje modyfikacja procesu X_t mająca ciągłe trajektorie
b) co można powiedzieć o hölderowskości trajektorii ciągłej modyfikacji?

3. Załóżmy, że N_t jest procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$, zaś ciągi a_n, b_n są rosnące do nieskończoności
a) udowodnij, że zmienna $X = \limsup_{n\to\infty} \frac{N_{a_n}}{b_n}$ jest stała p.w. tzn. istnieje $c \in [0, \infty]$ takie, że $P(X = c) = 1$.
b) znajdź ciągi a_n, b_n dla których $X = 1$ p.w.
c) znajdź proces $(Y_t)_{t\geq 0}$ taki, że $\limsup_{n\to\infty} \frac{Y_n}{n}$ nie jest stały p.w.

4. Zmienne losowe X_n są niezależne o średniej zero oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{EX_n^2}{n^2} < \infty$. Wykaż, że
$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to 0 \text{ p.w.}$$
(Wskazówka: wykaż najpierw, że dla $\varepsilon > 0$
$$P(\sup_{k\leq 2^n} |\sum_{i=1}^{k} X_i| > \varepsilon 2^n) \leq \sum_{i=1}^{2^n} \frac{EX_i^2}{\varepsilon^2 2^{2n}},$$
a później zastosuj lemat Borella-Cantelli)

5. Niech W_t będzie ruchem Browna startującym z zera, $a > 0 > b$ oraz $T = \inf\{t : W_t > a + bt\}, T_{\{a\}} = \inf\{t : W_t = a\}$. Pokaż, że dla $\lambda > 0$
$$Ee^{-\lambda T} = e^{-a(b+\sqrt{b^2+2\lambda})}$$

i wywnioskuj stąd, że

$$Ee^{-\lambda T_{\{a\}}} = e^{-a\sqrt{2\lambda}}.$$

(Wskazówka: $e^{sW_t - s^2 t/2}$ jest martyngałem dla dowolnego parametru s, zastosuj twierdzenie Dooba)

6. Załóżmy, że $T = [0, \infty)$, dla $0 \leq s \leq t$, $x \in R$ określmy $P(s, x, t, \cdot)$ jako rozkład normalny o średniej $m_{s,t}x$ i wariancji $\sigma^2_{s,t}$. Znajdź warunki konieczne i dostateczn na funkcje $(m_{s,t}, \sigma_{s,t})_{s \leq t}$ by istniała rodzina Markowa o funkcjach przejścia równych $P(s, x, t, \Gamma)$.