**Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej - 1**

W zadaniach poniżej i w kolejnych seriach $(W_t)_{t\geqslant 0}$ oznacza proces Wienera.

1. Znajdź rozkład zmiennej $5W_1 - W_3 + W_7$.

2. Dla jakich parametrów $a$ i $b$, zmienne $aW_1 - W_2$ oraz $W_3 + bW_5$ są niezależne?

3. Znajdź rozkład wektora losowego $(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_n})$ dla $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

4. Oblicz $\mathbb{E}(W_4^2|W_3)$ oraz $\mathbb{E}(W_3^2|W_4)$.

5. Udowodnij, że następujące procesy też są procesami Wienera:
   a) $X_t = -W_t$ (odbicie),
   b) $Y_t = c^{-1/2}W_{ct}, c > 0$ (przeskalowanie czasu),
   c) $Z_t = tW_{1/t}$ dla $t > 0$ oraz $Z_0 = 0$ (inwersja czasu),
   d) $U_t = W_{T+t} - W_T, T \geqslant 0$,
   e) $V_t = W_t$ dla $t \leqslant T$, $V_t = 2W_T - W_t$ dla $t > T$, gdzie $T \geqslant 0$.

6. Wykaż, że proces
$$B_t := (1+t)W_{t/(1+t)} - tW_1 \quad t \in [0,\infty)$$
   jest procesem Wienera (zauważ, że definicja $B_t$ zależy tylko od $(W_t)_{t\in[0,1]}$).

7. Udowodnij, że $\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = 0$ p.n..

8. Niech $\pi_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{k_n}^{(n)}\}$, gdzie $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{k_n}^{(n)} = b$ będzie ciągiem podziałów odcinka $[a,b]$ oraz $\|\pi_n\| := \max_k |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}|$ oznacza średnicę $\pi_n$. Udowodnij, że
$$S_n := \sum_{k=1}^{k_n} |W_{t_k^{(n)}} - W_{t_{k-1}^{(n)}}|^2 \to b-a \ \text{ w } L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \text{ przy } n \to \infty,$$
   jeśli $\|\pi_n\| \to 0$ oraz $S_n \to b-a$ p.n., jeśli $\sum_n \|\pi_n\| < \infty$.

9. Udowodnij, że prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera mają nieskończone wahanie na każdym przedziale.

10. Wykaż, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Wienera nie są ograniczone ani z góry ani z dołu.

11. Wykaż, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Wienera nie są jednostajnie ciągłe.

**Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej - 2**

1. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Wienera są funkcjami nieróżniczkowalnymi w żadnym punkcie przedziału $[0, \infty)$.
*Wskazówki:*
*a) Jeśli funkcja $f$ jest rózniczkowalna w jakimś punkcie przedziału $[0,1]$, to istnieje liczba $M < \infty$ taka, że dla odpowiednio dużych $n$ istnieje $0 \leqslant j \leqslant n-3$ taka, że $|f((j+1)/n) - f(j/n)| \leqslant M/n$, $|f((j+2)/n) - f((j+1)/n)| \leqslant M/n$ oraz $|f((j+3)/n) - f((j+2)/n)| \leqslant M/n$.*
*b) Wykaż, że $\mathbb{P}(|W_{(j+1)/n} - W_{j/n}| \leqslant M/n, |W_{(j+2)/n} - W_{(j+1)/n}| \leqslant M/n, |W_{(j+3)/n} - W_{(j+2)/n}| \leqslant M/n) \leqslant CMn^{-3/2}$ i wywioskuj stąd nieróżniczkowalność trajektorii na przedziale $[0,1]$.*

2. Udowodnij, że jeśli zbiór $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, to istnieje zbiór przeliczalny $T_0 \subset T$ taki, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}^T$ oraz $x(t) = y(t)$ dla $t \in T_0$ to $x \in A \Leftrightarrow y \in A$.

3. Niech $T = [a,b]$ oraz $a < t_0 < b$. Wykaż, że następujące zbiory nie należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$:
i) $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^T \colon \sup_{t\in[a,b]} |x_t| \leqslant 1\}$;
ii) $A_2 = \{x \in \mathbb{R}^T \colon t \to x_t$ ciągłe na [a,b] $\}$;
iii) $A_3 = \{x \in \mathbb{R}^T \colon \lim_{t\to t_0} x_t = 0\}$:
iv) $A_4 = \{x \in \mathbb{R}^T \colon t \to x_t$ ciągłe w $t_0\}$.
Wykaż mierzalność tych zbiorów przy założeniu ciągłości (prawostronnej ciągłości) trajektorii, tzn. wykaż, że wszystkie te zbiory po przecięciu z $C(T)$ ($RC(T)$ odp.) należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \cap C(T)$ ($\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \cap RC(T)$ odp.).

4. Niech $T = [a,b]$. Udowodnij, że $\mathcal{F} = \{A \cap C(T) \colon A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)\}$ jest $\sigma$-ciałem zbiorów borelowskich (w metryce supremum) na $C(T)$.

5. Wykaż, że istnieje proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ o przyrostach niezależnych, startujący z 0 taki, że $X_t - X_s$ ma rozkład Cauchy'ego z parametrem $t-s$ (proces taki nazywamy procesem Cauchy'ego, bądź procesem 1-stabilnym).

6. Które z następujących procesów są gaussowskie?:
a) $W_{3t}$, b) $W_t^2$, c) $W_{t^2} + 2t^2$, d) $3W_{2t} - 2W_2$, e) $W_{2t}\mathbf{1}_{W_t \neq 1}$, f) $W_t W_1$?

7. Policz funkcję kowariancji mostu Browna $W_t - tW_1$.

8. Wykaż, że proces gaussowski ma przyrosty niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy jego funkcja kowariancji spełnia $K(t,u) = K(s,u)$ dla $t, s \geqslant u$ (czyli $K(s,t) = \varphi(t \wedge s)$ dla pewnej funkcji $\varphi$).

9. Wykaż, że proces gaussowski o funkcji średniej $m(t) = EX_t$ i funkcji kowariancji $K(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t)$ jest stacjonarny wtedy i tylko wtedy, gdy $m$ jest stała oraz $K(s+h, t+h) = K(s,t)$ dla wszystkich $t, s, h$ (czyli $K(s,t) = \varphi(|t-s|)$ dla pewnej funkcji $\varphi$).

**Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej - 3**

1. Proces $X$ jest modyfikacją procesu Wienera. Które z następujących własności są spełnione dla procesu $X$:
a) niezależność przyrostów,
b) stacjonarność przyrostów,
c) ciągłość trajektorii,
d) $\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = 0$ p.n.
e) $\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = 0$ według prawdopodobieństwa?

2. Rozpatrzmy następujące 3 własności procesów:
a) ciągłość trajektorii;
b) stochastyczną ciągłość (tzn. $X_t \xrightarrow{\mathbb{P}} X_s$ gdy $t \to s$);
c) ciągłość wg $p$-tego momentu (tzn. $\mathbb{E}|X_t - X_s|^p \to 0$ gdy $t \to s$).
Jakie implikacje zachodzą między powyższymi własnościami?

3. Wykaż, że trajektorie procesu Wienera nie są lokalnie 1/2-hölderowskie.

4. Proces gaussowski nazywamy ułamkowym ruchem Browna, jeśli ma średnią zero oraz $\mathbb{E}|X_t - X_s|^2 = |t-s|^{2H}$ (można wykazać, że taki proces istnieje dla $0 < H < 1$). Udowodnij, że ułamkowy ruch Browna ma ciągłą modyfikację. Co można powiedzieć o hölderowskości jej trajektorii?

5. Załóżmy, że $T$ jest przedziałem i określmy:

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, \quad \mathcal{F}_{t-} := \sigma\Big(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s\Big).$$

a) Wykaż, że filtracja $\mathcal{F}_{t+}$ jest prawostronnie ciągła, tzn. $\mathcal{F}_{t++} = \mathcal{F}_{t+}$.
b) Udowodnij, że jeśli $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X$ jest filtracją generowaną przez proces $X$ o lewostronnie ciągłych trajektoriach, to $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t$.
c) Niech $T = [0, \infty)$, $A \in \mathcal{F}$ oraz $X_t = (t-1)^+ I_A$. Znajdź $\mathcal{F}_t^X$.
d) Dla $X$ jak w punkcie c) określmy $\tau := \inf\{t\colon X_t > 0\}$. Wykaż, że $\tau$ nie jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_t^X$ ale jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{t+}^X$.

6. Załóżmy, że $T$ jest przedziałem. Wykaż, że:
a) jeśli $\tau$ jest momentem zatrzymania, to $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich $t$
b) jeśli $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich $t$, to $\tau$ jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{t+}$.

7. Niech $T = [0, \infty)$, a $\tau$ będzie momentem zatrzymania, które ze zmiennych $\tau + 1, \tau^2, (\tau - 1)_+$ muszą być momentami zatrzymania?

**Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej - 4**

1. Niech $T = [0, \infty)$, a $(X_t)_{t \in T}$ procesem $(\mathcal{F}_t)$-adaptowalnym, o ciągłych trajektoriach. Wykaż, że dla $A$ otwartego $\tau_A := \inf\{t \colon X_t \in A\}$ jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{t+}$.

2. Wykaż, że jeśli proces $X_t$ ma niezależne przyrosty i prawostronnie ciągłe trajektorie, to dla $s < t$ zmienna $X_t - X_s$ jest niezależna od $\mathcal{F}^X_{s+}$.

3. Wykaż, że jeśli $\tau$ i $\sigma$ są momentami zatrzymania. Wykaż, że zdarzenia $\{\tau < \sigma\}, \{\tau = \sigma\}$ i $\{\tau \leqslant \sigma\}$ należą do $\mathcal{F}_\tau$, $\mathcal{F}_\sigma$ i $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$.

4. Wykaż, że jeśli $\tau$ jest momentem zatrzymania, to proces $X_t := I_{[0,\tau)}(t)$ jest progresywnie mierzalny.

5. Niech $\tau$ będzie momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, a $(X_t)$ będzie procesem $\mathcal{F}_t$-adaptowalnym. Udowodnij, że jeśli $\tau$ przyjmuje przeliczalnie wiele wartości, to $X_\tau$ jest $\mathcal{F}_\tau$ mierzalny na zbiorze $\tau < \infty$.

6. Wykaż, że jeśli $\sigma$ jest momentem zatrzymania, $\tau \geqslant \sigma$, $\tau$ ma wartości w $T \cup \{\infty\}$ oraz jest $\mathcal{F}_\sigma$ mierzalny, to $\tau$ jest momentem zatrzymania.

7. Załóżmy, że $N_t$ jest procesem Poissona z intensywnościa $\lambda$, tzn. procesem o prawostronnie ciągłych trajektoriach takim, że $N_0 = 0$, $N$ ma przyrosty niezależne, oraz $N_t - N_s \sim \mathrm{Poiss}(\lambda(t-s))$ dla $t > s$. Wykaż, że $(N_t - \lambda t)_{t \geqslant 0}$ oraz $((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t)_{t \geqslant 0}$ są martyngałami względem $(\mathcal{F}^N_t)_{t \geqslant 0}$.

8. Wykaż, że $(\exp(\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}), \mathcal{F}^W_t)_{t \geqslant 0}$ jest martyngałem dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej - 5**

1. (Prawo iterowanego logarytmu dla procesu Wienera) Wykaż, że
   a) $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1$ p.n.
   b) $\liminf_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = -1$ p.n.

   Wskazówki:
   i) Niech $C > 1$ oraz $u > C^{1/2}$. Wykaż, że

   $$\sum_n \mathbb{P}\Big(\sup_{C^n \leqslant t \leqslant C^{n+1}} W_t \geqslant u\sqrt{2C^n \ln\ln C^n}\Big) < \infty$$

   i wywnioskuj stąd, że $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \leqslant u$ p.n.
   ii) Wykaż, że $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \leqslant 1$ p.n. oraz $\liminf_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \geqslant -1$ p.n.
   iii) Udowodnij, że dla $g \sim \mathcal{N}(0,1)$ i $t > 0$,

   $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\Big)e^{-t^2/2} \leqslant \mathbb{P}(g \geqslant t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}t}e^{-t^2/2}.$$

   iv) Wykaż, że dla $C > 1$ i $u < 1$

   $$\sum \mathbb{P}(W_{C^n} - W_{C^{n-1}} \geqslant u\sqrt{1-1/C}\sqrt{2C^n\ln\ln C^n}) = \infty$$

   i wywnioskuj stąd i z ii), że $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \geqslant u(1-1/C)^{1/2} - C^{-1/2}$ p.n.

2. Udowodnij, że
   a) $\limsup_{t\to 0+} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln(1/t)}} = 1$ p.n.
   b) $\liminf_{t\to 0+} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln(1/t)}} = -1$ p.n.

3. Które z podanych niżej warunków implikują jednostajną całkowalność ciągu $X_n$:
   a) $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$,
   b) $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^2 < \infty$,
   c) $\mathbb{E}\sup_n |X_n| < \infty$,
   d) całkowalność oraz zbieżność $X_n$ w $L_1$,
   e) całkowalność oraz zbieżność $X_n$ p.n.?

4. Wykaż, że martyngał $M_t = \exp(\lambda W_t - \lambda^2 t/2)$ jest zbieżny p.n. i znajdź jego granicę. Czy jest on zbieżny w $L_1$?

5. Niech $\tau$ będzie momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_t^W$.
   a) Wykaż, że $(W_{\tau\wedge n}, \mathcal{F}_{\tau\wedge n})_{n=1}^{\infty}$ jest martyngałem.
   b) Udowodnij, że jeśli $\mathbb{E}\tau < \infty$, to $\mathbb{E}\sup_n W_{\tau\wedge n}^2 < \infty$.
   c) Wykaż, że jeśli $\mathbb{E}\tau < \infty$, to $\mathbb{E}W_\tau^2 = \mathbb{E}\tau$ i $\mathbb{E}W_\tau = 0$.

6. Niech $W_t$ będzie jednowymiarowym procesem Wienera oraz

$$\tau_a := \inf\{t > 0 \colon W_t = a\},\ \ \tilde{\tau}_a := \inf\{t > 0 \colon |W_t| = a\}.$$

Rozpatrując martyngały $W_t$ i $W_t^2 - t$ wykaż, że
a) $\tau_a < \infty$ p.n. dla wszystkich $a \in \mathbb{R}$,
b) $\mathbb{P}(\tau_a < \tau_{-b}) = \frac{b}{a+b}$ dla $a, b > 0$,
c) $\mathbb{E}\tilde{\tau}_a = a^2$ dla $a \geqslant 0$,
d) $\mathbb{E}\tau_a \wedge \tau_{-b} = ab$ dla $a, b > 0$,
e) $\mathbb{E}\tau_a = \infty$ dla wszystkich $a \neq 0$.

7. Rozpatrując martyngały $M_t^\lambda := \exp(\lambda W_t - \lambda^2 t/2)$ oraz $N_t^\lambda := (M_t^\lambda + M_t^{-\lambda})/2$ wykaż, że przy oznaczeniach poprzedniego zadania, dla wszystkich $a, \lambda \geqslant 0$,
a) $\mathbb{E}e^{-\lambda\tau_a} = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$,
b) $\mathbb{E}e^{-\lambda\tilde{\tau}_a} = (\cosh(a\sqrt{2\lambda}))^{-1}$.

**Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej - 6**

1. Załóżmy, że $h$ jest niemalejącą funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$. Udowodnij, że
   a) Jeśli $g$ ma wahanie skończone, to $g \circ h$ też ma wahanie skończone
   b) Jeśli $\int_{h(a)}^{h(b)} f dg$ istnieje, to

$$\int_a^b f(h(t))dg(h(t)) = \int_{h(a)}^{h(b)} f(s)dg(s).$$

2. Załóżmy, że $f, g, h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, przy czym $f$ i $g$ są ciągłe, a $h$ ma wahanie skończone. Udowodnij, że
   a) $H(x) = \int_a^x g(t)dh(t)$ ma wahanie skończone na $[a, b]$.
   b) $\int_a^b f dH = \int_a^b fgdh$.

3. Wykaż, że dla dowolnej funkcji ciągłej $f$ o wahaniu skończonym na $[a, b]$ zachodzi $\int_a^b f(s)df(s) = \frac{1}{2}(f^2(b) - f^2(a))$.

4. Załóżmy, że $(M_t)_{t\in[a,b]}$ jest ciągłym martyngałem oraz

$$A = \{\omega\colon\ M_t(\omega) \text{ ma wahanie skończone na } [a, b]\}.$$

   Wykaż, że $(M_t)$ ma z prawdopodobieństwem 1 trajektorie stałe na $A$, tzn.

$$\mathbb{P}(\forall_{t\in[a,b]}\ M_t 1_A = M_a 1_A) = 1.$$

**Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej - 7**

1. Oblicz następujące granice w $L_2(\Omega)$ przy $n \to \infty$:
   a) $\sum_{k=0}^{n-1} W_{tk/n}(W_{t(k+1)/n} - W_{tk/n})$
   b) $\sum_{k=0}^{n-1} W_{t(k+1)/n}(W_{t(k+1)/n} - W_{tk/n})$.

2. Oblicz $\mathrm{Cov}(\int_0^s h_1(t)dW_t, \int_0^s h_2(t)dW_t)$ dla $h_1, h_2 \in L_2([0,s])$.

3. Niech $C_p := (\mathbb{E}|W_1|^p)^{1/p}$. Wykaż, że dla $0 < p < \infty$, przekształcenie $h \to C_p^{-1}\int_0^T h(t)dW_t$ jest izometrycznym włożeniem $L_2([0,T])$ w $L_p(\Omega)$.

4. Wykaż, że dla $0 \leqslant u < t$ i $h \in L_2([0,t])$ zachodzi
$$\int_0^u h(s)dW_s = \int_0^t h\mathbf{1}_{[0,u]}(s)dW_s \text{ p.n.}$$

5. Wykaż, że dla $h \in C^1[0,t]$ zachodzi
$$\int_0^t h(s)dW_s = h(t)W_t - \int_0^t h'(s)W_s ds \text{ p.n.}$$

6. Wykaż, że proces
$$Y_t = \begin{cases} (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}dW_s & 0 \leqslant t < 1 \\ 0 & t = 1 \end{cases}$$
ma takie same rozkłady skończenie wymiarowe co proces $Z_t = W_t - tW_1$ (most Browna).