

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 1

1. Znajdź rozkład zmiennej $5W_1 - W_3 + W_7$.
2. Dla jakich parametrów a i b , zmienne $aW_1 - W_2$ oraz $W_3 + bW_5$ są niezależne?
3. Znajdź rozkład wektora losowego $(W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_n})$ dla $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$.
4. Udowodnij, że $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{t} = 0$ p.n.
5. Udowodnij, że następujące procesy też są procesami Wienera
 - a) $X_t = -W_t$ (odbicie)
 - b) $Y_t = c^{-1/2}W_{ct}$, $c > 0$ (przeskalowanie czasu)
 - c) $Z_t = tW_{1/t}$ dla $t > 0$ oraz $Z_0 = 0$ (inwersja czasu)
 - d) $U_t = W_{T+t} - W_T$, $T \geq 0$
 - e) $V_t = W_t$ dla $t \leq T$, $V_t = 2W_T - W_t$ dla $t > T$, gdzie $T \geq 0$.
6. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Wienera są nieograniczone.
7. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Wienera nie są jednostajnie ciągłe na \mathbb{R}_+ .
8. Niech $\pi_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{k_n}^{(n)}\}$, gdzie $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_{k_n}^{(n)} = b$ będzie ciągiem podziałów odcinka $[a, b]$ oraz $\|\pi_n\| := \max_k |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}|$ oznacza średnicę π_n . Udowodnij, że

$$S_n := \sum_{k=1}^{k_n} |W_{t_k^{(n)}} - W_{t_{k-1}^{(n)}}|^2 \rightarrow b - a \quad \text{w } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \text{ przy } n \rightarrow \infty,$$

jeśli $\|\pi_n\| \rightarrow 0$ oraz $S_n \rightarrow b - a$ p.n., jeśli $\sum_n \|\pi_n\| < \infty$.

9. Udowodnij, że prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera mają nieskończone wahanie na każdym przedziale.
10. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Wienera są funkcjami nieróżniczkowalnymi w żadnym punkcie przedziału $[0, \infty)$.

Wskazówki:

a) Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w jakimś punkcie przedziału $[0, 1]$, to istnieje liczba $M < \infty$ taka, że dla odpowiednio dużych n istnieje $0 \leq j \leq n-3$ taka, że $|f((j+1)/n) - f(j/n)| \leq M/n$, $|f((j+2)/n) - f((j+1)/n)| \leq M/n$ oraz $|f((j+3)/n) - f((j+2)/n)| \leq M/n$.

b) Wykaż, że $\mathbb{P}(|W_{(j+1)/n} - W_{j/n}| \leq M/n, |W_{(j+2)/n} - W_{(j+1)/n}| \leq M/n, |W_{(j+3)/n} - W_{(j+2)/n}| \leq M/n) \leq CMn^{-3/2}$ i wywioskuj stąd nieróżniczkowalność trajektorii na przedziale $[0, 1]$.

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 2

1. Udowodnij, że jeśli zbiór $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, to istnieje zbiór przeliczalny $T_0 \subset T$ taki, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}^T$ oraz $x(t) = y(t)$ dla $t \in T_0$ to $x \in A \Leftrightarrow y \in A$.
2. Niech $T = [a, b]$ $a < t_0 < b$, wykaż, że następujące zbiory nie należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$.
 - i) $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^T : \sup_{t \in [a, b]} |x_t| \leq 1\}$;
 - ii) $A_2 = \{x \in \mathbb{R}^T : t \rightarrow x_t \text{ ciągle na } [a, b]\}$;
 - iii) $A_3 = \{x \in \mathbb{R}^T : \lim_{t \rightarrow t_0} x_t = 0\}$;
 - iv) $A_4 = \{x \in \mathbb{R}^T : t \rightarrow x_t \text{ ciągle w } t_0\}$.Wykaż mierzalność tych zbiorów przy założeniu ciągłości (prawostronnej ciągłości) trajektorii tzn. wykaż, że wszystkie te zbiory po przecięciu z $C(T)$ ($RC(T)$ odp.) należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \cap C(T)$ ($\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \cap RC(T)$ odp.).
3. Niech $T = [a, b]$. Wykaż, że $\mathcal{F} = \{A \cap C(T) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)\}$ jest σ -ciałem zbiorów borelowskich (w metryce supremum) na $C(T)$.
4. Wykaż, że istnieje proces $(X_t)_{t \geq 0}$ o przyrostach niezależnych, startujący z 0 taki, że $X_t - X_s$ ma rozkład Cauchy'ego z parametrem $t - s$ (proces taki nazywamy procesem Cauchy'ego, bądź procesem 1-stabilnym).
5. Proces X jest modyfikacją procesu Wienera. Które z następujących własności są spełnione dla procesu X :
 - a) niezależność przyrostów,
 - b) stacjonarność przyrostów,
 - c) ciągłość trajektorii,
 - d) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = 0$ p.n.
 - e) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = 0$ według prawdopodobieństwa?
6. Rozpatrzmy następujące 3 własności procesów:
 - a) ciągłość trajektorii;
 - b) stochastyczną ciągłość (tzn. $X_t \xrightarrow{\mathbb{P}} X_s$ gdy $t \rightarrow s$);
 - c) ciągłość wg p -tego momentu (tzn. $\mathbb{E}|X_t - X_s|^p \rightarrow 0$ gdy $t \rightarrow s$).Jakie implikacje zachodzą między powyższymi własnościami?

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 3

1. Wykaż, że trajektorie procesu Wienera nie są lokalnie $1/2$ -hölderowskie.
2. Scentrowany proces gaussowski nazywamy ułamkowym ruchem Browna, jeśli $\mathbb{E}|X_t - X_s|^2 = |t - s|^{2\alpha}$ (można wykazać, że taki proces istnieje dla $0 < \alpha < 1$). Udowodnij, że ułamkowy ruch Browna ma ciągłą modyfikację. Co można powiedzieć o hölderowskości jej trajektorii?
3. Załóżmy, że T jest przedziałem i określmy:

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, \quad \mathcal{F}_{t-} := \sigma\left(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s\right).$$

- a) Wykaż, że filtracja \mathcal{F}_{t+} jest prawostronnie ciągła, tzn. $\mathcal{F}_{t++} = \mathcal{F}_{t+}$.
 - b) Udowodnij, że jeśli $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X$ jest filtracją generowaną przez proces X o lewostronnie ciągłych trajektoriach, to $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t$.
 - c) Niech $T = [0, \infty)$, $A \in \mathcal{F}$ oraz $X_t = (t-1)^+ I_A$. Znajdź \mathcal{F}_t^X .
 - d) Dla X jak w punkcie c) określmy $\tau := \inf\{t: X_t > 0\}$. Wykaż, że τ nie jest momentem zatrzymania względem \mathcal{F}_t^X ale jest momentem zatrzymania względem \mathcal{F}_{t+}^X .
4. Załóżmy, że T jest przedziałem, wykaż, że:
 - a) jeśli τ jest momentem zatrzymania, to $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich t
 - b) jeśli $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich t , to τ jest momentem zatrzymania względem \mathcal{F}_{t+} .
 5. Niech $T = [0, \infty)$, a τ będzie momentem zatrzymania, które ze zmiennych $\tau + 1, \tau^2, (\tau - 1)_+$ muszą być momentami zatrzymania?
 6. Niech $T = [0, \infty)$, a X_t procesem \mathcal{F}_t -adaptowalnym o ciągłych trajektoriach. Wykaż, że dla A otwartego $\tau_A := \inf\{t: X_t \in A\}$ jest momentem zatrzymania względem \mathcal{F}_{t+} .
 7. Wykaż, że jeśli τ i σ są momentami zatrzymania, to $\tau \wedge \sigma$ jest momentem zatrzymania, $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$ oraz zdarzenia $\{\tau < \sigma\}$, $\{\tau = \sigma\}$ i $\{\tau \leq \sigma\}$ należą do \mathcal{F}_τ , \mathcal{F}_σ i $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$.
 8. Wykaż, że jeśli τ jest momentem zatrzymania, to proces $X_t := I_{[0, \tau)}(t)$ jest progresywnie mierzalny.
 9. Niech τ będzie momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, a (X_t) będzie procesem \mathcal{F}_t -adaptowalnym. Wykaż, że
 - a) τ jest \mathcal{F}_τ -mierzalne
 - b) Jeśli τ przyjmuje przeliczalnie wiele wartości, to X_τ jest \mathcal{F}_τ mierzalny na zbiorze $\tau < \infty$.
 10. Wykaż, że jeśli σ jest momentem zatrzymania, $\tau \geq \sigma$ oraz τ jest \mathcal{F}_σ mierzalny, to τ jest momentem zatrzymania.
 11. Wykaż, że jeśli proces X_t ma niezależne przyrosty i prawostronnie ciągłe trajektorie, to dla $s < t$ zmienna $X_t - X_s$ jest niezależna od \mathcal{F}_{s+}^X .

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 4

1. Załóżmy, że N_t jest procesem Poissona, tzn. procesem o prawostronnie ciągłych trajektoriach takim, że $N_0 = 0$, N ma przyrosty niezależne, oraz $N_t - N_s \sim \text{Pois}(t - s)$ dla $t > s$. Wykaż, że $(N_t - \lambda t)_{t \geq 0}$ oraz $((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t)_{t \geq 0}$ są martyngałami względem $(\mathcal{F}_t^N)_{t \geq 0}$
2. Wykaż, że $(\exp(\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}), \mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$ jest martyngałem dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Niech W_t będzie n -wymiarowym procesem Wienera, a f funkcją harmoniczną na \mathbb{R}^n taką, że $\mathbb{E}|f(W_t)| < \infty$ dla wszystkich t . Wykaż, że $(f(W_t), \mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$ jest martyngałem.
4. (Prawo iterowanego logarytmu dla procesu Wienera) Wykaż, że
 - a) $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1$ p.n.
 - b) $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = -1$ p.n.

Wskazówki:

- i) Niech $C > 1$ oraz $u > C^{1/2}$. Wykaż, że

$$\sum_n \mathbb{P} \left(\sup_{C^n \leq t \leq C^{n+1}} W_t \geq u \sqrt{2C^n \ln \ln C^n} \right) < \infty$$

i wywnioskuj stąd, że $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} \leq u$ p.n.

ii) Wykaż, że $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} \leq 1$ p.n. oraz $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} \geq -1$ p.n.

iii) Udowodnij, że dla $g \sim \mathcal{N}(0, 1)$ i $t > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} \right) e^{-t^2/2} \leq \mathbb{P}(g \geq t) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t^2/2}.$$

iv) Wykaż, że dla $C > 1$ i $u < 1$

$$\sum \mathbb{P}(W_{C^n} - W_{C^{n-1}} \geq u \sqrt{1 - 1/C} \sqrt{2C^n \ln \ln C^n}) = \infty$$

i wywnioskuj stąd i z ii), że $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} \geq u(1 - 1/C)^{1/2} - C^{-1/2}$ p.n.

5. Udowodnij, że
 - a) $\limsup_{t \rightarrow 0+} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln(1/t)}} = 1$ p.n.
 - b) $\liminf_{t \rightarrow 0+} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln(1/t)}} = -1$ p.n.

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 5

1. Które z podanych niżej warunków implikują jednostajną całkowalność ciągu X_n :
 - a) $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$,
 - b) $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^2 < \infty$,
 - c) $\mathbb{E} \sup_n |X_n| < \infty$,
 - d) zbieżność X_n w L_1 ,
 - e) zbieżność X_n p.n.?
2. Wykaż, że martyngał $M_t = \exp(\lambda W_t - \lambda^2 t/2)$ jest zbieżny p.n. i znajdź jego granicę. Czy jest on zbieżny w L_1 ?
3. Niech $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^d)$ będzie d wymiarowym procesem Wienera, a $x_0 \in \mathbb{R}^d$ oraz $d > 2$.
 - a) Wykaż, że $|W_t - x_0|^{2-d}$ jest nieujemnym nadmartyngałem.
 - b) Udowodnij, że $|W_t - x_0|^{2-d}$ zbiega przy $t \rightarrow \infty$ do 0 według prawdopodobieństwa i p.n. i wywnioskuj stąd, że $\lim_{t \rightarrow \infty} |W_t| = \infty$ p.n.
 - c) Wykaż, że dla prawostronnie ciągłego nadmartyngału $(X_t)_{t \geq a}$ zachodzi

$$\forall \lambda > 0 \quad \lambda \mathbb{P}(\sup_{t \geq a} X_t \geq \lambda) \leq \sup_t \mathbb{E} X_t^- + \mathbb{E} X_a.$$

- d) Wykaż, że $\mathbb{P}(\exists_{t > 0} W_t = x_0) = 0$.
4. Niech τ będzie momentem zatrzymania względem \mathcal{F}_t^W .
 - a) Wykaż, że $(W_{\tau \wedge n}, \mathcal{F}_{\tau \wedge n})_{n=1}^\infty$ jest martyngałem.
 - b) Udowodnij, że jeśli $\mathbb{E}\tau < \infty$, to $\mathbb{E} \sup_n W_{\tau \wedge n}^2 < \infty$.
 - c) Wykaż, że jeśli $\mathbb{E}\tau < \infty$, to $\mathbb{E}W_\tau^2 = \mathbb{E}\tau$ i $\mathbb{E}W_\tau = 0$.
5. Niech W_t będzie jednowymiarowym procesem Wienera oraz

$$\tau_a := \inf\{t > 0: W_t = a\}, \quad \tilde{\tau}_a := \inf\{t > 0: |W_t| = a\}.$$

Rozpatrując martyngały W_t i $W_t^2 - t$ wykaż, że

- a) $\tau_a < \infty$ p.n. dla wszystkich $a \in \mathbb{R}$,
 - b) $\mathbb{P}(\tau_a < \tau_{-b}) = \frac{b}{a+b}$ dla $a, b > 0$,
 - c) $\mathbb{E}\tilde{\tau}_a = a^2$ dla $a \geq 0$,
 - d) $\mathbb{E}\tau_a \wedge \tau_{-b} = ab$ dla $a, b > 0$,
 - e) $\mathbb{E}\tau_a = \infty$ dla wszystkich $a \neq 0$.
6. Rozpatrując martyngały $M_t^\lambda = \exp(\lambda W_t - \lambda^2 t/2)$ oraz $N_t^\lambda = (M_t^\lambda + M_t^{-\lambda})/2$ wykaż, że przy oznaczeniach poprzedniego zadania, dla wszystkich $a, \lambda \geq 0$,
 - a) $\mathbb{E}e^{-\lambda \tau_a} = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$,
 - b) $\mathbb{E}e^{-\lambda \tilde{\tau}_a} = (\cosh(a\sqrt{2\lambda}))^{-1}$.

7. Załóżmy, że h jest niemalejącą funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$. Udowodnij, że
- Jeśli g ma wahanie skończone, to $g \circ h$ też ma wahanie skończone
 - Jeśli $\int_{h(a)}^{h(b)} f dg$ istnieje, to

$$\int_a^b f(h(t)) dg(h(t)) = \int_{h(a)}^{h(b)} f(s) dg(s).$$

8. Załóżmy, że $f, g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, przy czym f i g są ciągłe, a h ma wahanie skończone. Udowodnij, że
- $H(x) = \int_a^x g(t) dh(t)$ ma wahanie skończone na $[a, b]$.
 - $\int_a^b f dH = \int_a^b f g dh$.
9. Wykaż, że dla dowolnej funkcji ciągłej f o wahanii skończonym na $[a, b]$ zachodzi $\int_a^b f(s) df(s) = \frac{1}{2}(f^2(b) - f^2(a))$.
10. Oblicz granice w $L_2(\Omega)$ przy $n \rightarrow \infty$
- $\sum_{k=0}^{n-1} W_{tk/n} (W_{t(k+1)/n} - W_{tk/n})$
 - $\sum_{k=0}^{n-1} W_{t(k+1)/n} (W_{t(k+1)/n} - W_{tk/n})$.

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 6

1. Oblicz $\text{Cov}(\int_0^s h_1(t)dW_t, \int_0^s h_2(t)dW_t)$ dla $h_1, h_2 \in L_2([0, s])$.
2. Niech $C_p := (\mathbb{E}|W_1|^p)^{1/p}$. Wykaż, że dla $0 < p < \infty$, przekształcenie $h \rightarrow C_p^{-1} \int_0^T h(t)dW_t$ jest izometrycznym włożeniem $L_2([0, T])$ w $L_p(\Omega)$.
3. Wykaż, że dla $0 \leq u < t$ i $h \in L_2([0, t])$ zachodzi

$$\int_0^u h(s)dW_s = \int_0^t h\mathbb{1}_{[0,u]}(s)dW_s \text{ p.n.}$$

4. Wykaż, że dla $h \in C^1[0, t]$ zachodzi

$$\int_0^t h(s)dW_s = h(t)W_t - \int_0^t h'(s)W_s ds \text{ p.n.}$$

5. Wykaż, że proces

$$Y_t = \begin{cases} (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t = 1 \end{cases}$$

ma takie same rozkłady skończenie wymiarowe co proces $Z_t = W_t - tW_1$ (most Browna).

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 7

1. Wykaż, że jeśli $X \in \mathcal{L}_T^2, 0 \leq t \leq s \leq T$ oraz ξ jest ograniczoną zmienną losową \mathcal{F}_t mierzalną to $\xi X I_{(t,s]} \in \mathcal{L}_T^2$ oraz $\int_t^s \xi X dW = \xi \int_t^s X dW$ (Uwaga: $\int_t^s X dW$ definiujemy jako $\int_0^T \mathbb{1}_{(s,t]} X dW$).
2. Wykaż, że jeśli $0 < t_1 < \dots < t_m < T$ oraz ξ_k są zmiennymi losowymi w $L^2(\Omega)$, \mathcal{F}_{t_k} mierzalnymi to proces $X := \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k \mathbb{1}_{(t_k, t_{k+1}]}$ należy do \mathcal{L}_T^2 oraz $\int_0^t X dW = \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k (W_{t_{k+1} \wedge t} - W_{t_k \wedge t})$.
3. Załóżmy, że X jest procesem prognozowalnym, ciągłym w L^2 (tzn. $t \rightarrow X_t$ jest ciągła z $[0, T]$ w $L^2(\Omega)$). Wykaż, że wówczas $X \in \mathcal{L}_T^2$ oraz dla dowolnego ciągu podziałów $0 = t_0^{(n)} \leq t_1^{(n)} \leq \dots \leq t_{k_n}^{(n)} = T$ o średnicy zbiegającej do zera zachodzi dla $t \leq T$

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} X_{t_k^{(n)}} (W_{t_{k+1}^{(n)}} - W_{t_k^{(n)}}) \rightarrow \int_0^T X dW$$

w $L^2(\Omega)$ przy $n \rightarrow \infty$.

4. Oblicz $\int_0^t W_s dW_s$.
5. Niech τ będzie momentem zatrzymania takim, że $\mathbb{E}\tau < \infty$. Wykaż, że $\mathbb{1}_{[0,\tau]} \in \mathcal{L}_\infty^2$ oraz $\int_0^\infty \mathbb{1}_{[0,\tau]}(s) dW_s = W_\tau$. Wywnioskuj stąd, że $\mathbb{E}W_\tau = 0$ oraz $\mathbb{E}W_\tau^2 = \mathbb{E}\tau$.
6. Dla $a, b > 0$ określmy $\tau := \inf\{t : |W_t| = a\sqrt{b+t}\}$. Wykaż, że $\tau < \infty$ p.n. oraz $\mathbb{E}\tau < \infty$ wtedy i tylko wtedy gdy $a < 1$. Ponadto dla $a < 1$, $\mathbb{E}\tau = \frac{a^2 b}{1-a^2}$.
- 7* Niech ξ będzie zmienną losową o skończonej wariancji taką, że $\mathbb{E}\xi = 0$. Wykaż, że istnieje moment zatrzymania τ taki, że W_τ ma ten sam rozkład co ξ oraz $\mathbb{E}\tau = \mathbb{E}\xi^2$.
8. Załóżmy, że M jest adaptowalnym, prawostronnie ciągłym procesem takim, że $M_0 = 0$ i dla wszystkich t , $\mathbb{E}|M_t| < \infty$. Wykaż, że M jest martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbb{E}M_\tau = 0$ dla wszystkich ograniczonych momentów zatrzymania τ .

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 8

1. Niech \mathcal{A} będzie pewną klasą procesów adaptowalnych na $[0, T)$ taką, że jeśli $X \in \mathcal{A}$ to $X^\tau \in \mathcal{A}$ dla dowolnego momentu zatrzymania τ . Przez \mathcal{A}_{loc} oznaczamy wówczas klasę tych procesów adaptowalnych na $[0, T)$ dla których istnieje rosnący ciąg momentów zatrzymania τ_n taki, że $\tau_n \rightarrow T$ oraz $X^{\tau_n} \in \mathcal{A}$ dla wszystkich n .
 - a) Wykaż, że jeśli $X \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$ to $X^\tau \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$ dla dowolnego momentu zatrzymania τ
 - b) Wykaż, że $(\mathcal{A}_{\text{loc}})_{\text{loc}} = \mathcal{A}_{\text{loc}}$
 - c) Wykaż, że jeśli \mathcal{A} jest liniowa to \mathcal{A}_{loc} też jest liniowa.
2. Wykaż, że $M - M_0 \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M - M_0 \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^{2,c}$.
3. a) Wykaż, że każdy ograniczony ciągły martyngał lokalny jest martyngałem.
 b) Wykaż, że każdy nieujemny całkowalny ciągły martyngał lokalny jest nadmartyngałem.
 c*) Podaj przykład nieujemnego całkowalnego ciągłego martyngału lokalnego, który nie jest martyngałem.
4. Niech $X \in \Lambda_T^2$, $0 \leq t < s \leq T$ oraz ξ będzie zmienną losową \mathcal{F}_{t_1} mierzalną (niekoniecznie ograniczoną). Wykaż, że $\xi X \mathbb{1}_{(t,s]} \in \Lambda_T^2$ oraz $\int_t^s \xi X dW = \xi \int_t^s X dW$.
5. Niech $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^{2,c}$ oraz $X \in \Lambda_T^2(M)$. Wykaż, że dla dowolnego momentu zatrzymania τ zachodzi

$$\left(\int X dM \right)^\tau = \int X dM^\tau = \int X \mathbb{1}_{[0,\tau]} dM = \int X \mathbb{1}_{[0,\tau]} dM^\tau.$$

W szczególności jeśli procesy X i Y pokrywają się na przedziale $[0, \tau]$, to $(\int X dM)^\tau = (\int Y dM)^\tau$.

6. Niech X będzie martyngałem lokalnym takim, że $|X_t| \leq Y$ dla wszystkich t oraz $\mathbb{E}Y < \infty$. Wykaż, że X jest martyngałem.
7. Wykaż, że każdy ciągły martyngał lokalny $M = (M_t)_{t < T}$, którego trajektorie mają skończone wahanie na każdym przedziale $[0, t]$ jest stale równy M_0 .

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 9

1. Niech $M = \int W_t^2 dW_t$. Oblicz $\mathbb{E}M_s^2$. Jak wygląda przestrzeń $\mathcal{L}_T^2(M)$? Czy W_t^{-1} należy do tej przestrzeni?
2. Oblicz $\langle W^1, W^2 \rangle$, gdzie W^1, W^2 są niezależnymi procesami Wienera.
3. Udowodnij, że
 - a) $\langle M, M \rangle = \langle M \rangle = \langle -M \rangle$,
 - b) $\langle M, N \rangle = \langle N, M \rangle$,
 - c) $\langle M - M_0, N \rangle = \langle M, N - N_0 \rangle = \langle M - M_0, N - N_0 \rangle = \langle M, N \rangle$,
 - d) $(N, M) \rightarrow \langle M, N \rangle$ jest przekształceniem dwuliniowym,
 - e) $\langle M^\tau, N^\tau \rangle = \langle M^\tau, N \rangle = \langle M, N^\tau \rangle = \langle M, N \rangle^\tau$,
 - f) Jeśli $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^{2,c}$, $X, Y \in \Lambda_T^2(M)$ oraz $N_1 = \int X dM$, $N_2 = \int Y dM$, to $\langle N_1, N_2 \rangle = \int XY d\langle M \rangle$.
 - g) Jeśli $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^{2,c}$, $X \in \Lambda_T^2(M_1) \cap \Lambda_T^2(M_2)$ oraz $N_i = \int X dM_i$ to $\langle N_1, N_2 \rangle = \int X^2 d\langle M_1, M_2 \rangle$.
4. Wykaż, że
 - a) $|\langle M, N \rangle| \leq \langle M \rangle \langle N \rangle$
 - b) $\text{Wah}_{[s,t]}(\langle M, N \rangle) \leq \frac{1}{2}[\langle M \rangle_t - \langle M \rangle_s + \langle N \rangle_t - \langle N \rangle_s]$.
5. Niech $M, N \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^c$ oraz $X \in \Lambda_T^2(M) \cap \Lambda_T^2(N)$. Uzasadnij, że $X \in \Lambda_T^2(aM + bN)$ dla $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $\int X d(aM + bN) = a \int X dM + b \int X dN$.

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 10

1. Określamy

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{3n-1} \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} W_s^4 dW_s \right|^\alpha.$$

- a) Wykaż, że ciąg $S_n(2)$ jest zbieżny w L_1 i zidentyfikuj jego granicę.
 b) Co można powiedzieć o zbieżności według prawdopodobieństwa ciągu $S_n(\alpha)$ dla $\alpha \neq 2$?

2. Wykaż, że dla dowolnego procesu $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^c$, $X \in \Lambda_2^T(M)$ oraz momentu zatrzymania $\tau \leq T$,

$$\mathbb{E} \sup_{t < \tau} \left(\int_0^t X dM \right)^2 \leq 4 \mathbb{E} \int_0^\tau X_s^2 d\langle M \rangle_s.$$

3. Załóżmy, że $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^c$, $M_0 = 0$ zaś τ jest momentem zatrzymania takim, że $\mathbb{E}\langle M \rangle_\tau < \infty$. Wykaż, że M^τ jest martyngałem.
4. Korzystając ze wzoru na całkowanie przez części przedstaw $\int W_s^2 dW_s$ jako wyrażenie nie zawierające całek stochastycznych.
5. Załóżmy, że X jest procesem ciągłym i adaptowalnym, zaś Z ciągłym semimartyngałem. Wykaż, że jeśli $t < T$, $\Pi_n = (t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{k_n}^{(n)})$ jest ciągiem podziałów $[0, t]$ takim, że $0 = t_0^{(n)} \leq t_1^{(n)} \leq \dots \leq t_{k_n}^{(n)} = t$ oraz $\text{diam}(\Pi_n) \rightarrow 0$, to

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} X_{t_k^{(n)}} (Z_{t_{k+1}^{(n)}} - Z_{t_k^{(n)}}) \rightarrow \int_0^t X_s dZ_s \quad \text{według prawdopodobieństwa.}$$

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 11

1. Korzystając ze wzoru Itô oblicz $\langle W_t^2 \rangle$ oraz $\langle W_t, e^{W_t} \rangle$.
2. Niech f będzie funkcją klasy C^2 na \mathbb{R}^2 , korzystając z dwuwymiarowego wzoru Itô oblicz $df(t, W_t)$ oraz $df(tW_t)$.
3. Znajdź proces $(A_t)_{t \geq 0}$, którego trajektorie mają wahanie ograniczone na przedziałach skończonych taki, że $A_0 = 0$ oraz proces $X_t = \sin(2W_t - 3t) - A_t$ jest martyngałem lokalnym. Wykaż, że X_t jest martyngałem oraz $\mathbb{E}X_t^2 \leq 4t$.
4. Niech $Z_t = \exp(\lambda W_t - \lambda^2 t/2)$. Wykaż, że $dZ_t = \lambda Z_t dW_t$ tzn. $Z_t = 1 + \lambda \int_0^t Z_s dW_s$.
5. Wykaż, że ciąg

$$S_n = \sum_{k=1}^{3n} \frac{k}{n} W_{k/n}^3 (W_{k/n} - W_{(k-1)/n})$$

jest zbieżny według prawdopodobieństwa i znajdź jego granicę.

6. Niech M będzie ciągłym martyngałem lokalnym. Wykaż, że proces $N_t = \exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t)$ jest ciągłym martyngałem lokalnym oraz nadmartyngałem. Ponadto jeśli M jest ograniczony, to N jest martyngałem.
7. Niech $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^2 , G zbiorem otwartym ograniczonym w \mathbb{R}^d oraz $x \in G$. Określmy $\tau := \inf\{t: W_t + x \notin G\}$. Korzystając ze wzoru Itô wykaż, że jeśli g jest harmoniczna w G to $g(W_t^\tau + x)$ jest martyngałem. Pokaż, że wystarczy zakładać, iż g jest C^2 w pewnym otoczeniu domknięcia G .
8. Wykaż, że dla 3-wymiarowego ruchu Browna W_t i $a \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$ proces $X_t = |W_t - a|^{-1}$ jest martyngałem lokalnym, ale nie jest martyngałem. Ponadto X_t jest nadmartyngałem oraz zbiega do 0 w L^1 i prawie na pewno.
9. Wykaż, że 2-wymiarowego ruchu Browna W_t i $a \in \mathbb{R}^2, a \neq 0$ proces $X_t = \ln |W_t - a|$ jest martyngałem lokalnym. Wywnioskuj stąd, że z prawdopodobieństwem 1 proces W_t omija punkt a , ale trajektoria procesu jest dowolnie bliska punktu a .

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 12

1. Załóżmy, że $W = (W^{(1)}, W^{(2)}, W^{(3)})$ jest trójwymiarowym procesem Wienera oraz

$$X_t := \int_0^t \sin(W_t^{(3)}) dW_t^{(1)} + \int_0^t \cos(W_t^{(3)}) dW_t^{(2)}.$$

Wykaż, że X jest procesem Wienera.

2. Wykaż, że dla $a > 0$ proces $X_t = \xi e^{bt} + \sqrt{a} \int_0^t e^{b(t-s)} dW_s$ jest jedynym rozwiązaniem równania $dX_t = bX_t dt + \sqrt{a} dW_t$ z warunkiem początkowym $X_0 = \xi$. Jeśli $b < 0$ oraz ξ ma rozkład $\mathcal{N}(0, \frac{a}{2b})$ to X_t jest procesem stacjonarnym (proces Ornsteina-Uhlenbecka)

3. i) Wykaż, że dla $x, \sigma, b \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jeden proces $X = (X_t)_{t \geq 0}$ taki, że

$$X_t = x + \sigma \int_0^t X_s dW_s + b \int_0^t X_s ds.$$

Ponadto $\sup_{t \leq u} \mathbb{E} X_t^2 < \infty$ dla $u < \infty$.

ii) Oblicz $\mathbb{E} X_t$.

iii) Znajdź stochastyczne równania różniczkowe spełnione przez $X^2 + t$ i e^X .

4. Wykaż, że rozwiązanie równania $dX = e^{-X} dW - \frac{1}{2} e^{-2X} dt$ eksploduje w skończonym czasie. (Wsk. Rozpatrz proces $Y = e^X$).

5. Niech $W = (W^1, \dots, W^d)$ będzie d -wymiarowym ruchem Browna, $d \geq 2$ oraz $R_t := |W_t|$ (R_t jest nazywane procesem Bessela). Wykaż, że

- a) $B_t := \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{W_s^{(j)}}{R_s} dW_s^{(j)}$ jest jednowymiarowym procesem Wienera;
 b) $R_t = \int_0^t \frac{d-1}{2R_s} ds + B_t$

6. Znajdź taką miarę probabilistyczną \mathbb{Q} na $(\Omega, \mathcal{F}_{\leq 1}^W)$, by proces $(W_t + 2t^4)_{0 \leq t \leq 1}$ był procesem Wienera względem \mathbb{Q} .

7. Niech $T < \infty$, U będzie procesem Wienera na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,

$$Z_t = \exp \left(\int_0^t b(s, U_s) dU_s - \frac{1}{2} \int_0^t b^2(s, U_s) ds \right), \quad W_t := U_t - \int_0^t b(s, U_s) ds.$$

Stosując twierdzenie Girsanowa wykaż, że jeśli $\mathbb{E} Z_T = 1$ to istnieje miara probabilistyczna \mathbb{Q}_T taka, że na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}_T)$ para $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ jest procesem Wienera oraz

$$dU_t = b(t, U_t) dt + dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad U_0 = 0. \quad (1)$$