Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 1

1. Znajdź rozkład zmiennej $5W_1 - W_3 + W_7$.

2. Dla jakich parametrów a i b, zmienne $aW_1 - W_2$ oraz $W_3 + bW_5$ są niezależne?

3. Udowodnij, że $\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = 0$ p.n.

4. Znajdź rozkład wektora losowego $(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_n})$ dla $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

5. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Wienera są nieograniczone.

6. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Wienera nie są jednostajnie ciągłe na $\mathbb{R}_+$.

7. Udowodnij, że następujące procesy też są procesami Wienera
a) $X_t = -W_t$ (odbicie)
b) $Y_t = c^{-1/2}W_{ct}, c > 0$ (przeskalowanie czasu)
c) $Z_t = tW_{1/t}$ dla $t > 0$ oraz $Z_0 = 0$ (inwersja czasu)
d) $U_t = W_{T+t} - W_T, T \geqslant 0$
e) $V_t = W_t$ dla $t \leqslant T$, $V_t = 2W_T - W_t$ dla $t > T$, gdzie $T \geqslant 0$.

8. Niech $\pi_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{k_n}^{(n)}\}$, gdzie $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{k_n}^{(n)} = b$ będzie ciągiem podziałów odcinka $[a,b]$ oraz $\|\pi_n\| = \max_k |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}|$ oznacza średnicę π_n. Udowodnij, że
$$S_n = \sum_{k=1}^{k_n} |W_{t_k^{(n)}} - W_{t_{k-1}^{(n)}}|^2 \to b - a, n \to \infty \text{ w } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P),$$
jeśli $\|\pi_n\| \to 0$ oraz $S_n \to b - a$ p.n., jeśli $\sum_n \|\pi_n\| < \infty$.

9. Udowodnij, że prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera mają nieskończone wahanie na każdym przedziale.

10. Niech $f_i(t)$ będzie dowolną bazą $L_2[0,1]$, $h_i(t) = \int_0^t f_i(s)ds$ oraz niech g_i będzie ciągiem niezależnych zmiennych $\mathcal{N}(0,1)$. Wykaż, że szereg $X_t = \sum_i g_i h_i(t)$ jest zbieżny w L^2 dla dowolnego $t \in [0,1]$ oraz X_t ma te same rozkłady skończenie wymiarowe co proces Wienera.

11. Niech $I(0) = \{1\}, I(n) = \{1, \ldots, 2^{n-1}\}, n = 1, 2, \ldots$. *Układem Haara* nazywamy rodzinę funkcji $(h_{n,k})_{n=0,1,\ldots,k\in I(n)}$ określonych na $[0,1]$ wzorami $h_{0,1}(t) \equiv 1$ oraz dla $n = 1, 2, \ldots, k \in I(n)$,
$$h_{n,k}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} & (2k-2)2^{-n} \leqslant t < (2k-1)2^{-n} \\ -2^{\frac{n-1}{2}} & (2k-1)2^{-n} \leqslant t < 2k2^{-n} \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Układem Schaudera nazywamy rodzinę funkcji $(S_{n,k})_{n=0,1,\ldots,k\in I(n)}$ określonych na $[0,1]$ wzorem $S_{n,k}(t)=\int_0^t h_{n,k}(s)ds$. Niech $(g_{n,k})_{n=0,1,\ldots,k\in I(n)}$ będzie rodziną niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$, połóżmy

$$W_t^{(n)}(\omega)=\sum_{m=0}^{n}\sum_{k\in I(m)} g_{m,k}(\omega)S_{m,k}(t).$$

Wykaż, że dla prawie wszystkich $\omega\in\Omega$ ciąg funkcji $(W_t^{(n)}(\omega))$ zbiega jednostajnie na $[0,1]$ do pewnej funkcji ciągłej $W_t(\omega)$. Jeśli określimy np. $W_t(\omega)=0$ dla pozostałych ω to tak zdefiniowany proces stochastyczny jest procesem Wienera na [0,1].

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 2

1. Udowodnij, że jeśli zbiór $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ to istnieje zbiór przeliczalny $T_0 \subset T$ taki, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}^T$ oraz $x(t) = y(t)$ dla $t \in T_0$ to $x \in A \Leftrightarrow y \in A$.

2. Niech $T = [a, b]$ $a < t_0 < b$, wykaż, że następujące zbiory nie należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$.
   $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^T \colon \sup_{t\in[a,b]} |x_t| \leqslant 1\}$;
   $A_2 = \{x \in \mathbb{R}^T \colon t \to x_t$ ciągłe na [a,b] $\}$;
   $A_3 = \{x \in \mathbb{R}^T \colon \lim_{t\to t_0} x_t = 0\}$:
   $A_4 = \{x \in \mathbb{R}^T \colon t \to x_t$ ciągłe w $t_0\}$.
   Wykaż mierzalność tych zbiorów przy założeniu ciągłości (prawostronnej ciągłości) trajektorii tzn. wykaż, że wszystkie te zbiory po przecięciu z $C(T)$ ($RC(T)$ odp.) należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \cap C(T)$ ($\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \cap RC(T)$ odp.).

3. Niech $T = [a, b]$. Wykaż, że $\mathcal{F} = \{A \cap C(T) \colon A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)\}$ jest sigma ciałem zbiorów borelowskich (w metryce supremum) na $C(T)$.

4. Wykaż, że istnieje proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ o przyrostach niezależnych, startujący z 0 taki, że $X_t - X_s$ ma rozkład Cauchy'ego z parametrem $t - s$ (proces taki nazywamy procesem Cauchy'ego, bądź procesem 1-stabilnym).

5. Proces X jest modyfikacją procesu Wienera. Które z następujących własności są spełnione dla procesu X:
   a) niezależność przyrostów,
   b) stacjonarność przyrostów,
   c) ciągłość trajektorii,
   d) $\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = 0$ p.n.
   e) $\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = 0$ według prawdopodobieństwa?

6. Rozpatrzmy następujące 3 własności procesów:
   a) ciągłość trajektorii;
   b) stochastyczną ciągłość (tzn. $X_t \xrightarrow{\mathbf{P}} X_s$ gdy $t \to s$);
   c) ciągłość wg p-tego momentu (tzn. $\mathbf{E}|X_t - X_s|^p \to 0$ gdy $t \to s$).
   Jakie implikacje zachodzą między powyższymi własnościami?

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 3

1. Wykaż, że trajektorie procesu Wienera nie są lokalnie 1/2-hölderowskie.

2. Scentrowany proces gaussowski nazywamy ułamkowym ruchem Browna, jeśli $\mathbf{E}|X_t - X_s|^2 = |t-s|^{2\alpha}$ (można wykazać, że taki proces istnieje dla $0 < \alpha < 1$). Udowodnij, że ułamkowy ruch Browna ma ciągłą modyfikację. Co można powiedzieć o hölderowskości jej trajektorii?

3. Załóżmy, że T jest przedziałem i określmy:
$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, \ \mathcal{F}_{t-} := \sigma\Big(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s\Big).$$
a) Wykaż, że filtracja $\mathcal{F}_{t+}$ jest prawostronnie ciągła, tzn. $\mathcal{F}_{t++} = \mathcal{F}_{t+}$.
b) Udowodnij, że jeśli $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X$ jest filtracją generowaną przez proces X o lewostronnie ciągłych trajektoriach, to $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t$.
c) Niech $T = [0,\infty), A \in \mathcal{F}$ oraz $X_t = (t-1)^+ I_A$. Znajdź $\mathcal{F}_t^X$.
d) Dla X jak w punkcie c) określmy $\tau := \inf\{t \colon X_t > 0\}$. Wykaż, że τ nie jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_t^X$ ale jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{t+}^X$.

4. Załóżmy, że T jest przedziałem, wykaż, że:
a) jeśli τ jest momentem zatrzymania, to $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich t
b) jeśli $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich t, to τ jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{t+}$.

5. Niech $T = [0,\infty)$, a τ będzie momentem zatrzymania, które ze zmiennych $\tau+1, \tau^2, \tau-1$ muszą być momentami zatrzymania?

6. Niech $T = [0,\infty)$, a X_t procesem $\mathcal{F}_t$-adaptowalnym o ciągłych trajektoriach. Wykaż, że dla A otwartego $\tau_A := \inf\{t \colon X_t \in A\}$ jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{t+}$.

7. Wykaż, że jeśli τ i σ są momentami zatrzymania to zdarzenia $\{\tau < \sigma\}, \{\tau = \sigma\}$ i $\{\tau \leqslant \sigma\}$ należą do $\mathcal{F}_\tau$, $\mathcal{F}_\sigma$ i $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$.

8. Wykaż, że jeśli τ jest momentem zatrzymania, to proces $X_t := I_{[0,\tau)}(t)$ jest progresywnie mierzalny.

9. Niech τ będzie momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, a (X_t) będzie procesem $\mathcal{F}_t$-adaptowalnym. Wykaż, że
a) τ jest $\mathcal{F}_\tau$-mierzalne
b) Jeśli τ przyjmuje przeliczalnie wiele wartości, to X_τ jest $\mathcal{F}_\tau$ mierzalny na zbiorze $\tau < \infty$.

10. Wykaż, że jeśli σ jest momentem zatrzymania, $\tau \geqslant \sigma$ oraz τ jest $\mathcal{F}_\sigma$ mierzalny, to τ jest momentem zatrzymania.

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 4

1. Wykaż, że jeśli proces X_t ma niezależne przyrosty i prawostronnie ciągłe trajektorie, to $X_t - X_s$ jest niezależne od $\mathcal{F}^X_{t+}$.

2. Załóżmy, że N_t jest procesem Poissona, tzn. procesem o prawostronnie ciągłych trajektoriach takim, że $N_0 = 0$, N ma przyrosty niezależne, oraz $N_t - N_s \sim \mathrm{Poiss}(t-s)$ dala $t > s$. Wykaż, że $(N_t - \lambda t)_{t\geqslant 0}$ oraz $((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t)_{t\geqslant 0}$ są martyngałami względem $(\mathcal{F}^N_t)_{t\geqslant 0}$

3. Wykaż, że $(\exp(\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}), \mathcal{F}^W_t)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. (Prawo iterowanego logarytmu dla procesu Wienera) Wykaż, że
a) $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1$ p.n.
b) $\liminf_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = -1$ p.n.

   Wskazówki:
i) Niech $C > 1$ oraz $u > C^{1/2}$. Wykaż, że

$$\sum_n \mathbf{P}\Big(\sup_{C^n\leqslant t\leqslant C^{n+1}} W_t \geqslant u\sqrt{2C^n\ln\ln C^n}\Big) < \infty$$

   i wywnioskuj stąd, że $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \leqslant u$ p.n.
ii) Wykaż, że $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \leqslant 1$ p.n. oraz $\liminf_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \geqslant -1$ p.n.
iii) Udowodnij, że dla $g \sim \mathcal{N}(0,1)$ i $t > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\Big)e^{-t^2/2} \leqslant \mathbf{P}(g \geqslant t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}t}e^{-t^2/2}.$$

   iv) Wykaż, że dla $C > 1$ i $u < 1$

$$\sum \mathbf{P}(W_{C^n} - W_{C^{n-1}} \geqslant u\sqrt{1-1/C}\sqrt{2C^n\ln\ln C^n}) = \infty$$

   i wywnioskuj stąd i z ii), że $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \geqslant u(1-1/C)^{1/2} - C^{-1/2}$ p.n.

5. Udowodnij, że
a) $\limsup_{t\to 0+} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln(1/t)}} = 1$ p.n.
b) $\liminf_{t\to 0+} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln(1/t)}} = -1$ p.n.

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 5

1. Które z podanych niżej warunków implikują jednostajną całkowalność ciągu X_n:
   a) $\sup_n \mathbf{E}|X_n| < \infty$,
   b) $\sup_n \mathbf{E}|X_n|^2 < \infty$,
   c) $\mathbf{E}\sup_n |X_n| < \infty$,
   d) zbieżność X_n w L_1,
   e) zbieżność X_n p.n.?

2. Niech $(X_n)_{n\leqslant 0}$ będzie podmartyngałem z czasem odwróconym takim, że $\lim_{n\to-\infty} \mathbf{E}X_n > -\infty$. Wykaż, że (X_n) jest jednostajnie całkowalny.

3. Wykaż, że martyngał $M_t = \exp(\lambda W_t - \lambda^2 t/2)$ jest zbieżny p.n. i znajdź jego granicę. Czy jest on zbieżny w L_1?

4. a) Wykaż, że jeśli f jest dwukrotnie różniczkowalna na $\mathbb{R}$ oraz f, f', f'' są ograniczone, to
$$M_t = f(W_t) - f(W_0) - \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_u)du$$
   jest martyngałem względem $\mathcal{F}_t^W$.
   b) Ogólniej, jeśli f jest dwukrotnie różniczkowalna na $\mathbb{R}^d$, pochodne cząstkowe f rzędu mniejszego niż 2 są ograniczone oraz W jest d-wymiarowym procesem Wienera, to
$$M_t = f(W_t) - f(W_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(W_u)du$$
   jest martyngałem względem $\mathcal{F}_t^W$.

5. Niech $W_t = (W_t^1, \ldots, W_t^d)$ będzie d wymiarowym procesem Wienera, a $x_0 \in \mathbb{R}^d$ oraz $d > 2$.
   a) Wykaż, że $|W_t - x_0|^{2-d}$ jest nieujemnym nadmartyngałem.
   b) Udowodnij, że $|W_t - x_0|^{2-d}$ zbiega przy $t \to \infty$ do 0 według prawdopodobieństwa i p.n. i wywnioskuj stąd, że $\lim_{t\to\infty} |W_t| = \infty$ p.n..
   c) Wykaż, że dla prawostronnie ciągłego nadmartyngału $(X_t)_{t\geqslant a}$ zachodzi
$$\forall_{\lambda>0}\ \lambda \mathbf{P}(\sup_{t\geqslant a} X_t \geqslant \lambda) \leqslant \sup_t \mathbf{E}X_t^- + \mathbf{E}X_a.$$
   d) Wykaż, że $\mathbf{P}(\exists_{t>0}\ W_t = x_0) = 0$.

6. Niech τ będzie momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_t^W$.
   a) Wykaż, że $(W_{\tau\wedge n}, \mathcal{F}_{\tau\wedge n})_{n=1}^\infty$ jest martyngałem.
   b) Udowodnij, że jeśli $\mathbf{E}\tau < \infty$, to $\mathbf{E}\sup_n W_{\tau\wedge n}^2 < \infty$.
   c) Wykaż, że jeśli $\mathbf{E}\tau < \infty$, to $\mathbf{E}W_\tau^2 = \mathbf{E}\tau$ i $\mathbf{E}W_\tau = 0$.

7. Niech W_t będzie jednowymiarowym procesem Wienera oraz

$$\tau_a := \inf\{t > 0\colon W_t = a\},\ \tilde{\tau}_a := \inf\{t > 0\colon |W_t| = a\}.$$

Rozpatrując martyngały W_t i $W_t^2 - t$ wykaż, że
a) $\tau_a < \infty$ p.n. dla wszystkich $a \in \mathbb{R}$,
b) $\mathbf{P}(\tau_a < \tau_{-b}) = \frac{b}{a+b}$ dla $a, b > 0$,
c) $\mathbf{E}\tilde{\tau}_a = a^2$ dla $a \geqslant 0$,
d) $\mathbf{E}\tau_a \wedge \tau_{-b} = ab$ dla $a, b > 0$,
e) $\mathbf{E}\tau_a = \infty$ dla wszystkich $a \neq 0$.

8. Rozpatrując martyngały $M_t^\lambda = \exp(\lambda W_t - \lambda^2 t/2)$ oraz $N_t^\lambda = (M_t^\lambda + M_t^{-\lambda})/2$ wykaż, że przy oznaczeniach poprzedniego zadania, dla wszystkich $a, \lambda \geqslant 0$,
a) $\mathbf{E}e^{-\lambda\tau_a} = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$,
b) $\mathbf{E}e^{-\lambda\tilde{\tau}_a} = (\cosh(a\sqrt{2\lambda}))^{-1}$.

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 6

1. Załóżmy, że h jest niemalejącą funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$. Udowodnij, że
a) Jeśli g ma wahanie skończone, to $g \circ h$ też ma wahanie skończone
b) Jeśli $\int_{h(a)}^{h(b)} f dg$ istnieje, to

$$\int_a^b f(h(t))dg(h(t)) = \int_{h(a)}^{h(b)} f(s)dg(s).$$

2. Załóżmy, że $f, g, h \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, przy czym f i g są ciągłe, a h ma wahanie skończone. Udowodnij, że
a) $H(x) = \int_a^x g(t)dh(t)$ ma wahanie skończone na $[a, b]$.
b) $\int_a^b f dH = \int_a^b fg dh$.

3. Wykaż, że dla dowolnej funkcji ciągłej f o wahaniu skończonym na $[a, b]$ zachodzi $\int_a^b f(s)df(s) = \frac{1}{2}(f^2(b) - f^2(a))$.

4. Oblicz granice w $L_2(\Omega)$ przy $n \to \infty$
a) $\sum_{k=0}^{n-1} W_{tk/n}(W_{t(k+1)/n} - W_{tk/n})$
b) $\sum_{k=0}^{n-1} W_{t(k+1)/n}(W_{t(k+1)/n} - W_{tk/n})$.

5. Oblicz $\mathrm{Cov}(\int_0^s h_1(t)dW_t, \int_0^s h_2(t)dW_t)$ dla $h_1, h_2 \in L_2([0, s])$.

6. Niech $C_p := (\mathbf{E}|W_1|^p)^{1/p}$. Wykaż, że dla $0 < p < \infty$, przekształcenie $h \to C_p^{-1} \int_0^T h(t)dW_t$ jest izometrycznym włożeniem $L_2([0, T])$ w $L_p(\Omega)$.

7. Wykaż, że dla $0 \leqslant u < t$ i $h \in L_2([0, t])$ zachodzi

$$\int_0^u h(s)dW_s = \int_0^t h\mathbb{1}_{[0,u]}(s)dW_s \text{ p.n.}$$

8. Wykaż, że dla $h \in C^1[0, t]$ zachodzi

$$\int_0^t h(s)dW_s = h(t)W_t - \int_0^t h^{'}(s)W_s ds \text{ p.n.}$$

9. Wykaż, że proces

$$Y_t = \begin{cases} (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s & 0 \leqslant t < 1 \\ 0 & t = 1 \end{cases}$$

ma takie same rozkłady skończenie wymiarowe co proces $Z_t = W_t - tW_1$ (most Browna).

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 7

1. Wykaż, że jeśli $X \in \mathcal{L}^2_T, 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T$ oraz ξ jest ograniczoną zmienną losową $\mathcal{F}_t$ mierzalną to $\xi X I_{(t,s]} \in \mathcal{L}^2_T$ oraz $\int_t^s \xi X dW = \xi \int_t^s X dW$ (Uwaga: $\int_t^s X dW$ definiujemy jako $\int_0^T \mathbb{1}_{(s,t]} X dW$).

2. Wykaż, że jeśli $0 < t_1 < \ldots < t_m < T$ oraz ξ_k są zmiennymi losowymi w $L^2(\Omega)$, $\mathcal{F}_{t_k}$ mierzalnymi to proces $X := \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k \mathbb{1}_{(t_k, t_{k+1}]}$ należy do $\mathcal{L}^2_T$ oraz $\int_0^t X dW = \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k (W_{t_{k+1}\wedge t} - W_{t_k \wedge t})$.

3. Załóżmy, że X jest procesem prognozowalnym, ciągłym w L^2 (tzn. $t \to X_t$ jest ciągła z $[0,T]$ w $L^2(\Omega)$). Wykaż, że wówczas $X \in \mathcal{L}^2_T$ oraz dla dowolnego ciągu podziałów $0 = t_0^{(n)} \leqslant t_1^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant t_{k_n}^{(n)} = T$ o średnicy zbiegającej do zera zachodzi dla $t \leqslant T$
$$\sum_{k=0}^{k_n-1} X_{t_k^{(n)}} (W_{t_{k+1}^{(n)}} - W_{t_k^{(n)}}) \to \int_0^T X dW$$
w $L^2(\Omega)$ przy $n \to \infty$.

4. Oblicz $\int_0^t W_s dW_s$.

5. Niech τ będzie momentem zatrzymania takim, że $\mathbf{E}\tau < \infty$. Wykaż, że $\mathbb{1}_{[0,\tau]} \in \mathcal{L}^2_\infty$ oraz $\int_0^\infty \mathbb{1}_{[0,\tau]}(s) dW_s = W_\tau$. Wywnioskuj stąd, że $\mathbf{E}W_\tau = 0$ oraz $\mathbf{E}W_\tau^2 = \mathbf{E}\tau$.

6. Dla $a, b > 0$ określmy $\tau := \inf\{t : |W_t| = a\sqrt{b+t}\}$. Wykaż, że $\tau < \infty$ p.n. oraz $\mathbf{E}\tau < \infty$ wtedy i tylko wtedy gdy $a < 1$. Ponadto dla $a < 1$, $\mathbf{E}\tau = \frac{a^2 b}{1-a^2}$.

7. Niech ξ będzie zmienną losową o skończonej wariancji taką, że $\mathbf{E}\xi = 0$. Wykaż, że istnieje moment zatrzymania τ taki, że W_τ ma ten sam rozkład co ξ oraz $\mathbf{E}\tau = \mathbf{E}\xi^2$.

8. Załóżmy, że M jest adaptowalnym, prawostronnie ciągłym procesem takim, że $M_0 = 0$ i dla wszystkich t, $\mathbf{E}|M_t| < \infty$. Wykaż, że M jest martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{E}M_\tau = 0$ dla wszystkich ograniczonych momentów zatrzymania τ.

9. Wykaż, że dla $X \in \mathcal{L}^2_T$, $M := (\int X\, dW)^2 - \int X^2\, ds$ jest martyngałem.

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 8

1. Niech $\mathcal{A}$ będzie pewną klasą procesów adaptowalnych na $[0,T)$ taką, że jeśli $X \in \mathcal{A}$ to $X^\tau \in \mathcal{A}$ dla dowolnego momentu zatrzymania τ. Przez $\mathcal{A}_{\text{loc}}$ oznaczamy wówczas klasę tych procesów adaptowalnych na $[0,T)$ dla których istnieje rosnący ciąg momentów zatrzymania τ_n taki, że $\tau_n \to T$ oraz $X^{\tau_n} \in \mathcal{A}$ dla wszystkich n.
   a) Wykaż, że jeśli $X \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$ to $X^\tau \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$ dla dowolnego momentu zatrzymania τ
   b) Wykaż, że $(\mathcal{A}_{\text{loc}})_{\text{loc}} = \mathcal{A}_{\text{loc}}$
   c) Wykaż, że jeśli $\mathcal{A}$ jest liniowa to $\mathcal{A}_{\text{loc}}$ też jest liniowa.

2. Wykaż, że $M - M_0 \in \mathcal{M}^c_{\text{loc}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M - M_0 \in \mathcal{M}^{2,c}_{\text{loc}}$.

3. a) Wykaż, że każdy ograniczony ciągły martyngał lokalny jest martyngałem.
   b) Wykaż, że każdy nieujemny całkowalny ciągły martyngał lokalny jest nadmartyngałem.
   c) Podaj przykład nieujemnego całkowalnego ciągłego martyngału lokalnego, który nie jest martyngałem.

4. Niech $X \in \Lambda^2_T$, $0 \leqslant t < s \leqslant T$ oraz ξ będzie zmienną losową $\mathcal{F}_{t_1}$ mierzalną (niekoniecznie ograniczoną). Wykaż, że $\xi X \mathbb{1}_{(t,s]} \in \Lambda^2_T$ oraz $\int_t^s \xi X dW = \xi \int_t^s X dW$.

5. Znajdź proces $X \in \Lambda^2_T$ taki, że $\int_0^t X_s dW_s$ nie jest martyngałem.

6. Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{\text{loc}}$ oraz $X \in \Lambda^2_T(M)$. Wykaż, że dla dowolnego momentu zatrzymania τ zachodzi
$$\left(\int X dM\right)^\tau = \int X dM^\tau = \int X \mathbb{1}_{[0,\tau]} dM = \int X \mathbb{1}_{[0,\tau]} dM^\tau.$$
   W szczególności jeśli procesy X i Y pokrywają się na przedziale $[0,\tau]$, to $(\int X dM)^\tau = (\int Y dM)^\tau$.

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 9

1. Oblicz $\langle W^1, W^2\rangle$, gdzie W^1, W^2 są niezależnymi procesy Wienera.

2. Niech X będzie martyngałem lokalnym takim, że $|X_t| \leqslant Y$ dla wszystkich t oraz $\mathbf{E}Y < \infty$. Wykaż, że X jest martyngałem.

3. Wykaż, że każdy ciągły martyngał lokalny $M = (M_t)_{t<T}$, którego trajektorie mają skończone wahanie na każdym przedziale $[0, t]$ jest stale równy M_0.

4. Niech $M = \int W_t^2 dW_t$. Oblicz $\mathbf{E}M_s^2$. Jak wygląda przestrzeń $\mathcal{L}_T^2(M)$? Czy W_t^{-1} należy do tej przestrzeni?

5. Niech $M, N \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^c$ oraz $X \in \Lambda_T^2(M) \cap \Lambda_T^2(N)$. Uzasadnij, że $X \in \Lambda_T^2(aM + bN)$ dla $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $\int Xd(aM + bN) = a\int XdM + b\int XdN$.

6. Udowodnij, że
   a) $\langle M, M\rangle = \langle M\rangle = \langle -M\rangle$,
   b) $\langle M, N\rangle = \langle N, M\rangle$,
   c) $\langle M - M_0, N\rangle = \langle M, N - N_0\rangle = \langle M - M_0, N - N_0\rangle = \langle M, N\rangle$,
   d) $(N, M) \to \langle M, N\rangle$ jest przekształceniem dwuliniowym,
   e) $\langle M^\tau, N^\tau\rangle = \langle M^\tau, N\rangle = \langle M, N^\tau\rangle = \langle M, N\rangle^\tau$,
   f) Jeśli $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^{2,c}$, $X, Y \in \Lambda_T^2(M)$ oraz $N_1 = \int X\, dM$, $N_2 = \int Y\, dM$, to $\langle N_1, N_2\rangle = \int XY d\langle M\rangle$.
   g) Jeśli $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^{2,c}$, $X \in \Lambda_T^2(M_1) \cap \Lambda_T^2(M_2)$ oraz $N_i = \int X\, dM_i$ to $\langle N_1, N_2\rangle = \int X^2 d\langle M_1, M_2\rangle$.

7. Wykaż, że
   a) $|\langle M, N\rangle| \leqslant \langle M\rangle\langle N\rangle$
   b) $\mathrm{Wah}_{[}s, t]\left(\langle M, N\rangle\right) \leqslant \frac{1}{2}[\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s + \langle N\rangle_t - \langle N\rangle_s]$.

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 10

1. Wykaż, że dla dowolnego procesu $M \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}$, $X \in \Lambda_2^T(M)$ oraz momentu zatrzymania $\tau \leqslant T$,
$$\mathbf{E}\sup_{t<\tau}\Big(\int_0^t X\,dM\Big)^2 \leqslant 4\mathbf{E}\int_0^\tau X_s^2\,d\langle M\rangle_s.$$
2. Załóżmy, że $M \in \mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}$, $M_0 = 0$ zaś τ jest momentem zatrzymania takim, że $\mathbf{E}\langle M\rangle_\tau < \infty$. Wykaż, że M^τ jest martyngałem.
3. Korzystając ze wzoru na całkowanie przez części przedstaw $\int W_s^2 dW_s$ jako wyrażenie nie zawierające całek stochastycznych.
4. Korzystając ze wzoru Itô oblicz $\langle W_t^2\rangle$ oraz $\langle W_t, e^{W_t}\rangle$.
5. Niech f będzie funkcją klasy C^2 na $\mathbb{R}^2$, korzystając z wzoru Itô oblicz $df(t, W_t)$.
6. Niech $Z_t = \exp(\lambda W_t - \lambda^2 t/2)$. Wykaż, że $dZ_t = \lambda Z_t dW_t$ tzn. $Z_t = 1 + \lambda\int_0^t Z_s dW_s$.
7. Niech $\sigma = (\sigma_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant d}$ będzie macierzą procesów z Λ^2. Określamy wówczas $\int \sigma dW$ jako m wymiarowy proces $(\sum_{j=1}^d \sigma_{1j} dW_j, \ldots, \sum_{j=1}^d \sigma_{mj} dW_j)$. Niech $Z = (Z_1, \ldots, Z_m) = \int \sigma dW + \int b dt$, gdzie $b = (b_1(t), \ldots, b_m(t))$ proces m wymiarowy ciągły, adaptowalny. Dla $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ klasy C^2 oblicz korzystając z wzoru Itô $df(Z)$.

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 11

1. Niech M będzie ciągłym martyngałem lokalnym. Wykaż, że proces $N_t = \exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t)$ jest ciągłym martyngałem lokalnym oraz nadmartyngałem. Ponadto jeśli M jest ograniczony, to N jest martyngałem.

2. Niech $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^2, G zbiorem otwartym ograniczonym w $\mathbb{R}^d$ oraz $x \in G$. Określmy $\tau := \inf\{t\colon W_t + x \notin G\}$. Korzystając ze wzoru Itô wykaż, że jeśli g jest harmoniczna w G to $h(W_t^\tau + x)$ jest martyngałem. Pokaż, że wystarczy zakładać, iż g jest C^2 w pewnym otoczeniu domknięcia G.

3. Wykaż, że dla 3-wymiarowego ruchu Browna W_t i $a \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$ proces $X_t = |W_t - a|^{-1}$ jest martyngałem lokalnym, ale nie jest martyngałem. Ponadto X_t jest nadmartyngałem oraz zbiega do 0 w L^1 i prawie na pewno.

4. Wykaż, że 2-wymiarowego ruchu Browna W_t i $a \in \mathbb{R}^2, a \neq 0$ proces $X_t = \ln|W_t - a|$ jest martyngałem lokalnym. Wywnioskuj stąd, że z prawdopodobieństwem 1 proces W_t omija punkt a, ale trajektoria procesu jest dowolnie bliska punktu a.

5. Wykaż, że d-wymiarowy proces X startujący z zera o trajektoriach ciągłych jest procesem Wienera względem filtracji $\mathcal{F}_s$ wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $u \in \mathbb{R}^d$ oraz $s < t$ zachodzi $\mathbf{E}(\exp(i\langle u, X_t - X_s\rangle)|\mathcal{F}_s) = \exp(-(t-s)\|u\|^2/2)$ p.n..

6. Załóżmy, że $M_1, M_2, \ldots, M_d$ są ciągłymi martyngałami lokalnymi startującymi z zera takimi, że $\langle M_j, M_k\rangle = \delta_{j,k}t$. Wykaż, że $M = (M_1, M_2, \ldots, M_d)$ jest d-wymiarowym procesem Wienera.

7. Niech $T < \infty$ oraz $X = (X_t)_{0\leqslant t<T}$ będzie procesem prognozowalnym takim, że dla pewnej liczby całkowitej $m \geqslant 1$ zachodzi
$$\mathbf{E}\int_0^T X^{2m}(s)ds < \infty.$$
Wykaż, że $X \in \mathcal{L}_T^2$ oraz $M = \int X dW$ jest martyngałem takim, że
$$\mathbf{E}M_T^{2m} \leqslant (m(2m-1))^m T^{m-1}\mathbf{E}\int_0^T X_s^{2m} ds$$
(Wsk. Wzór Itô i nierówność Höldera)

8. Niech $W = (W^1, \ldots, W^d)$ będzie d-wymiarowym ruchem Browna, a $R_t = \|W_t\|$. Wykaż, że
a) $B_t := \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{W_s^{(i)}}{R_s} dW_s^i$ jest jednowymiarowym procesem Wienera;
b) $R_t = \int_0^t \frac{d-1}{2R_s}ds + B_t$ (R_t jest nazywane procesem Bessela.)

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 12

1. Załóżmy, że $W = (W^{(1)}, W^{(2)}, W^{(3)})$ jest trójwymiarowym procesem Wienera oraz
$$X_t := \int_0^t \sin(W_t^{(3)})dW_t^{(1)} + \int_0^t \cos(W_t^{(3)})dW_t^{(2)}.$$
Wykaż, że X jest procesem Wienera.

2. Wykaż, że dla $a > 0$ proces $X_t = \xi e^{bt} + \sqrt{a}\int_0^t e^{b(t-s)}dW_s$ jest jedynym rozwiązaniem równania $dX_t = bX_t dt + \sqrt{a}dW_t$ z warunkiem początkowym $X_0 = \xi$. Jeśli $b < 0$ oraz ξ ma rozkład $\mathcal{N}(0, \frac{-a}{2b})$ to X_t jest procesem stacjonarnym (proces Ornsteina-Uhlenbecka)

3. i) Wykaż, że dla $x, \sigma, b \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jeden proces $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ taki, że
$$X_t = x + \sigma\int_0^t X_s dW_s + b\int_0^t X_s ds.$$
Ponadto $\sup_{t \leqslant u} \mathbf{E}X_t^2 < \infty$ dla $u < \infty$.
ii) Oblicz $\mathbf{E}X_t$.
iii) Znajdź stochastyczne równania różniczkowe spełnione przez X^2 i e^X.

4. Wykaż, że rozwiązanie równania $dX = e^{-X}dW - \frac{1}{2}e^{-2X}dt$ eksploduje w skończonym czasie. (Wsk. Rozpatrz proces $Y = e^X$).

5. Załóżmy, że $A(t)$ jest ciągłą funkcją na $[0, T]$ o wartościach w macierzach $m \times m$, $\sigma(t)$ jest ciągłą funkcją na $[0, T]$ o wartościach w macierzach $m \times d$ zaś $a(t)$ jest ciągłą funkcją na $[0, T]$ o wartościach w $\mathbb{R}^m$. Niech $S(t)$ będzie jedynym rozwiązaniem równania
$$\frac{dS(t)}{dt} = A(t)S(t); \quad S(0) = I.$$
Ponadto niech W będzie d-wymiarowym procesem Wienera, a ξ zmienną losową niezależną od W. Wykaż, że

a)
$$\xi(t) := S(t)(\xi + \int_0^t S^{-1}(s)a(s)ds)$$
jest rozwiązaniem równania deterministycznego
$$\frac{d\xi(t)}{dt} = A(t)\xi(t) + a(t); \quad \xi(0) = \xi,$$

b)
$$X(t) = S(t)(\xi + \int_0^t S^{-1}(s)a(s)ds + \int_0^t S^{-1}(s)\sigma(s)dW_s)$$
jest jedynym rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego
$$dX_t = (A(t)X_t + a(t))dt + \sigma(t)dW_t; \quad X_0 = \xi.$$

Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 13

1. Wykaż, że rozwiązanie równania

$$dX_t = (1 + X_t)(1 + X_t^2)dt + (1 + X_t^2)dW_t$$

eksploduje w skończonym czasie. Ponadto wartość oczekiwana czasu do eksplozji jest skończona.

2. Niech $Z = Z_0 + A + M, Y = Y_0 + B + N$ będą ciągłymi semimartyngałami. Definiujemy całkę Stratonowicza wzorem

$$\int_0^t Y_s \circ dZ_s := \int_0^t Y_s dZ_s + \frac{1}{2}\langle M, N\rangle.$$

Pokazać, że jeśli f jest funkcją klasy C^3 na $\mathbb{R}$ to

$$f(Z_t) = f(Z_0) + \int_0^t f'(Z_s) \circ dZ_s.$$

3. Pokazać, że przy oznaczeniach poprzedniego zadania oraz dowolnym ciągu $\pi_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{k_n}^{(n)}\}$ podziałów odcinka $[0, t]$ takim, że $\mathrm{diam}(\pi_n) \to 0$ zachodzi

$$\sum_{j=1}^{k_n} \frac{Y_{t_{j+1}^{(n)}} + Y_{t_j^{(n)}}}{2}(Z_{t_{j+1}^{(n)}} - Z_{t_j^{(n)}}) \to \int_0^t Y_s \circ dZ_s$$

przy $n \to \infty$ według prawdopodobieństwa.

4. Znajdź taką miarę probabilistyczną $\mathbb{Q}$ na $(\Omega, \mathcal{F}^W_{\leqslant 1})$, by proces $(W_t + 2t^4)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ był procesem Wienera względem $\mathbb{Q}$.

5. Niech μ oznacza miarę Wienera na $C([0, 1])$ (tzn. rozkład wyznaczony przez proces Wienera na $[0, 1]$). Dla $h \in C([0, 1])$ określamy nową miarę μ_h wzorem $\mu_h(A) := \mu(h + A)$.
a) Wykaż, że jeśli $h(t) = \int_0^t g(s)ds$ dla $0 \leqslant t \leqslant 1$ oraz $g \in L^2[0, 1]$ to miara μ_h jest absolutnie ciągła względem μ oraz znaleźć gęstość.
b*) Jeśli h nie ma powyższej postaci to μ i μ_h są wzajemnie singularne.

6. Niech $T < \infty$, U będzie procesem Wienera na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$,

$$Z_t = \exp(\int_0^t b(s, U_s)dU_s - \int_0^t b^2(s, U_s)ds/2), \quad W_t := U_t - \int_0^t b(s, U_s)ds.$$

Stosując twierdzenie Girsanowa wykaż, że jeśli $\mathbf{E}Z_T = 1$ to istnieje miara probabilistyczna $\mathbb{Q}_T$ taka, że na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}_T)$ para $(W_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ jest procesem Wienera oraz

$$dU_t = b(t, U_t)dt + dW_t, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad U_0 = 0. \tag{1}$$