Zadania z Procesów Stochastycznych 1

1. Pokaż, że równanie
$$dX_t = 3X_t^{\frac{1}{3}}dt + 3X_t^{\frac{2}{3}}dW_t, \quad X_0 = 0$$
ma nieskończenie wiele mocnych rozwiązań postaci
$$X_t^\theta = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant t < \beta_\theta \\ W_t^3 & \beta_\theta \leqslant t < \infty, \end{cases}$$
gdzie $0 \leqslant \theta < \infty$ i $\beta_\theta = \inf\{s \geqslant \theta\colon\ W_s = 0\}$.

2. Pokaż, że równanie $dX_t = (2 + \mathrm{sgn}(X_t))dt + dW_t$, $X_0 = 0$ ma słabe rozwiązanie. Przeprowadź konstrukcję jakiegoś słabego rozwiązania.

   Wskazówka: użyj twierdzenia Girsanowa.

3. (Czas lokalny procesu Wienera w zerze)
(a) Wykaż, że istnieje ciągły, niemalejący proces $(L_t)_{t\geqslant 0}$ taki, że
$$|W_t| = \int_0^t \mathrm{sgn}(W_s)dW_s + L_t.$$
Wskazówka: funkcję $x \mapsto |x|$ przybliżyć przy pomocy ciągu funkcji f_n klasy C^2, których druga pochodna jest ciągła i ma postać:
$$f_n''(x) = \begin{cases} n & \text{dla } |x| \leqslant \frac{1}{n} - \varepsilon_n, \\ 0 & \text{dla } |x| \geqslant \frac{1}{n} \\ f_n'' \text{ liniowa} & \text{na } [\frac{1}{n} - \varepsilon_n \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}] \text{i} [-\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant -\frac{1}{n} + \varepsilon_n]. \end{cases}$$
Przy czym ε_n są takie, że $\lim_{n\to\infty} n\varepsilon_n = 0$.
(b) Wykaż, że istnieje taki ciąg $\delta_k \to 0$, że
$$L_t = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\delta_k} |\{0 \leqslant s \leqslant t : |W_s| \leqslant \delta_k\}| \qquad \text{p.n.}$$
Wskazówka: Przybliż odpowiednio $x \mapsto |x|$ od góry.
Proces L_t nazywa się czasem lokalnym procesu Wienera w zerze.
(c) Wywnioskuj, że jeżeli $\sigma(x) = 1$ dla $x \geqslant 0$ i $\sigma(x) = -1$ dla $x < 0$, to proces $\int_0^t \sigma(W_s)dW_s$ jest adaptowany do $(\overline{\mathcal{F}_t^{|W|}})_{t\geqslant 0}$.
Uwaga: Ogólniej, jeżeli $a \in \mathbb{R}$, to tak samo pokazuje się istnienie ciągłego, niemalejącego procesu $(L_t^a)_{t\geqslant 0}$ spełniającego
$$|W_t - a| = |a| + \int_0^t \mathrm{sgn}(W_s - a)dW_s + L_t^a$$

4. Niech $(L_t^a)_{t\geqslant 0}$ będzie jak w uwadze z poprzedniego zadania. Wykaż, że L_t^a rośnie tylko w punktach t takich, że $W_t = a$.
Wskazówka: Zastosuj wzór Ito do funkcji $f(x) = x^2$ i semimartyngałów $|W_t - a|$ oraz $W_t - a$.

Zadania z Procesów Stochastycznych 2

1. Załóżmy, że funkcje $b, \sigma\colon\ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ są lokalnie Lipschitzowskie, tzn. dla $n = 1, 2, \ldots$ istnieje stała L_n taka, że
$$\max\{|b(t,x) - b(t,y)|, |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|\} \leqslant L_n|x-y| \text{ dla } |x|, |y| \leqslant n.$$
Wykaż, że rozwiązanie równania
$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = x$$
jest jednoznaczne w sensie trajektorii.

2. Załóżmy, że $b, \sigma\colon\ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ są funkcjami mierzalnymi i ograniczonymi oraz istnieje stała $L > 0$ i funkcja niemalejąca $\rho : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ takie, że dla każdego $\varepsilon > 0$, $\int_0^\varepsilon (\rho(x))^{-2} dx = \infty$ oraz
$$\begin{aligned} |b(t,x) - b(t,y)| &\leqslant L|x-y| \\ |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| &\leqslant \rho(|x-y|) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}, t \in [0,T]. \end{aligned}$$
Udowodnij, że rozwiązanie równania
$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = x$$
jest jednoznaczne w sensie trajektorii.

   Wskazówka: Rozważ dwa rozwiązania X i $\tilde{X}$ z tym samym procesem Wienera. Używając wzoru Itô oszacuj najpierw $\mathbb{E}f(X - \tilde{X})$ dla nieujemnej funkcji f klasy C^2 o ograniczonych pochodnych. Następnie, dobierając odpowiednio ciąg funkcji, pokaż, że $\mathbb{E}|X - \tilde{X}| \leqslant C\int_0^t E|X_s - \tilde{X}_s| ds$.

3. Udowodnij, że dla $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$ równanie
$$dX_t = |X_t|^\alpha dW_t, \qquad X_0 = 0$$
ma rozwiązanie jednoznaczne w sensie trajektorii.

4. (Dambis, Dubins, Schwarz)
Niech M będzie ciągłym martyngałem lokalnym (o wartościach rzeczywistych) względem pewnej prawostronnie ciągłej filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$. Załóżmy ponadto, że $M_0 = 0$ oraz $\lim_{t\to\infty}\langle M\rangle_t = \infty$ p.n. Dla $t \geqslant 0$ definiujemy
$$\tau_t = \inf\{s \geqslant 0\colon\ \langle M\rangle_s > t\}.$$
Udowodnij, że proces $B_t = M_{\tau_t}$ jest standardowym procesem Wienera względem filtracji $(\mathcal{G}_t)_{t\geqslant 0}$, gdzie $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\tau_t}$.

5. Wykaż, że dla $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ równanie
$$dX_t = |X_t|^\alpha dW_t, \qquad X_0 = 0$$
ma niezerowe słabe rozwiązanie, czyli nie zachodzi jednoznaczność rozwiązań ani w sensie trajektorii ani w sensie rozkładu.

   Wskazówka: Niech V_s będzie procesem Wienera połóżmy $M_t = \int_0^t |V_s|^{-\alpha} dV_s$. Niech τ_t będzie zmianą czasu z poprzedniego zadania, czyli $W_t = M_{\tau_t}$ jest procesem Wienera. Szukanym słabym rozwiązaniem jest (W, X), gdzie $X_t = V_{\tau_t}$.

Zadania z Procesów Stochastycznych 3

1. (Eliminacja dryfu) Rozważamy następujące równanie (w $\mathbb{R}$):

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \tag{1}$$

Załóżmy, że $\sigma^2(x) > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, b, σ ciągłe. Niech

$$p(x) = \int_c^x \exp\{-2\int_c^y \frac{b(z)}{\sigma^2(z)}dz\}dy$$

Funkcja p jest ściśle rosnąca, więc $p : \mathbb{R} \mapsto (p(-\infty), p(+\infty))$ jest odwracalna. Niech q oznacza jej odwrotną. Ponadto, oznaczmy $\tilde{\sigma}(y) = p'(q(y))\sigma(q(y))$ dla $p(-\infty) < y < p(+\infty)$ i $\tilde{\sigma}(y) = 0$ w przeciwnym przypadku.

Udowodnij, że proces (W, X) jest słabym (odpowiednio: mocnym) rozwiązaniem (1) wtedy i tylko wtedy, gdy $(W, p(X_t))$, jest słabym (mocnym) rozwiązaniem równania

$$dY_t = \tilde{\sigma}(Y_s)dW_s, \qquad \text{gdzie } p(-\infty) < Y_0 < p(+\infty).$$

2. Wykaż, że jeśli $Q_{X|\mathcal{G}}$ jest regularnym rozkładem warunkowym X względem $\mathcal{G}$, to dla dowolnej funkcji φ takiej, że $\mathbb{E}|\varphi(X)| < \infty$ zachodzi

$$\mathbb{E}(\varphi(X)|\mathcal{G})(\omega) = \int \varphi(x)dQ_{X|\mathcal{G}}(\omega, dx) \quad \text{p.n..}$$

3. Znajdź regularny rozkład warunkowy X względem Y, jeśli
i) Y jest zmienną dyskretną, tzn. istnieje zbiór przeliczalny S taki, że $\mathbb{P}(Y \in S) = 1$
ii) (X, Y) ma łączną gęstość $g(x, y)$.

4. Załóżmy, że zmienna X ma rozkład μ_X, a $Q_{Y|X}$ jest regularnym rozkładem warunkowym Y względem X. Wykaż, że para (X, Y) ma łączny rozkład $\mu_X(dx)Q_{Y|X}(x, dy)$.

5. Niech $\mathbb{P}$ będzie rozwiązaniem problemu martyngałowego (x, a, b). Wykaż, że

$$M_t = Z_t - x - \int_0^t b(s, Z_s)ds$$

jest ciągłym martyngałem lokalnym względem filtracji $(\mathcal{B}_t)$ oraz

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t a(s, Z_s)ds$$

Zadania z Procesów Stochastycznych 4

W zadaniach poniżej $(N_t)_{t\geqslant 0}$ oznacza proces Poissona z intensywnością λ.

1. Oblicz $\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 4, N_4 = 5)$ oraz $\mathbb{P}(N_1 = N_2 < N_3 - 1)$.

2. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Poissona są niemalejące, przyjmują wartości z $\mathbb{Z}_+$, mają wszystkie skoki równe 1 oraz dążą do nieskończoności.

3. Wykaż, że moment pierwszego skoku w procesie Poissona
$$S_1 := \inf\{t\colon\ N_t > 0\}$$
jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ.

4. Niech
$$S_k := \inf\{t\colon\ N_t = k\}$$
będzie momentem k-tego skoku w procesie Poissona. Wykaż, że odstępy między skokami
$$T_1 = \S_1,\ T_2 = S_2 - S_1,\ T_3 = S_3 - S_2, \ldots$$
są zmiennymi niezależnymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym.

5. Przy notacji z poprzedniego zadania oblicz
a) $\mathbb{E}S_6$;
b) $\mathbb{E}(S_6|N_3 = 4)$;
c) $\mathbb{E}(N_5|N_3 = 2)$;
d) $\mathbb{E}(N_3|N_5 = 4)$.

6. Udowodnij, że $\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda$ p.n.

7. Niech $N_t^{(1)}$ i $N_t^{(2)}$ będą niezależnymi procesami Poissona. Wykaż, że $N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$ jest procesem Poissona

8. Liczba wyświetleń pewnej strony internetowej do chwili t – N_t jest procesem Poissona z intensywnością λ. Każde wyświetlenie z prawdopodobieństwem p jest dokonywane spoza Polski (niezależnie dla każdego wyświetlenia i niezależnie od procesu N). Niech $N_t^{(1)}$ będzie liczbą wyświetleń strony spoza Polski, a $N_t^{(2)}$ z Polski. Wykaż, że $N_t^{(1)}$ i $N_t^{(2)}$ są niezależnymi procesami Poissona.

9. Załóżmy, że $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem stratującym z zera, przyjmującym wartości całkowite nieujemne, o niezależnych, stacjonarnych przyrostach i prawostronnie ciągłych i niemalejących trajektoriach. Ponadto załóżmy, że
$$\mathbb{P}(X_t = 1) = \lambda t + o(t), \quad \mathbb{P}(X_t \geqslant 2) = o(t) \quad \text{ przy } t \to 0+.$$
Wykaż, że X jest procesem Poissona.

10. (Złożony proces Poissona) Załóżmy, że N jest procesem Poissona, a $Y_1, Y_2, \ldots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, niezależnym od N. Niech
$$X_t = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N_t} Y_k & \text{jeśli } N_t > 0 \\ 0 & \text{jeśli } N_t = 0. \end{cases}$$
Wykaż, że X jest procesem o niezależnych i stacjonarnych przyrostach.

Zadania z Procesów Stochastycznych 5

1. Załóżmy, że $T = \mathbb{N}$. Wykaż, że $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest łańcuchem Markowa (z dowolną, niekoniecznie przeliczalną przestrzenią stanów) wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{P}(X_{n+1} \in \Gamma|\mathcal{F}_n^X) = \mathbb{P}(X_n \in \Gamma|X_n)$ dla dowolnego n i dowolnego zbioru mierzalnego Γ.

2. Niech $X_0, Y_0, Y_1, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym X_0 ma wartości w E, a Y_i w E'. Niech h_n będzie funkcją mierzalną z $E \times E'$ w E dla $n = 1, 2, \ldots$. Określmy indukcyjnie ciąg X_n wzorem $X_{n+1} = h_n(X_n, Y_n)$, $n = 0, 1, \ldots$. Udowodnij, że (X_n) jest łańcuchem Markowa.

3. Załóżmy, że przestrzeń stanów E jest przeliczalna. Wykaż, że wówczas
a) $(X_t)_{t\in T}$ jest procesem Markowa wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ i $k_1, \ldots, k_n \in E$ takich, że $\mathbb{P}(X_{t_1} = k_1, \ldots, X_{t_{n-1}} = k_{n-1}) \neq 0$
$$\mathbb{P}(X_{t_n} = k_n|X_{t_1} = k_1, \ldots, X_{t_{n-1}} = k_{n-1}) = \mathbb{P}(X_{t_n} = k_n|X_{t_{n-1}} = k_{n-1}).$$
b) $(X_t)_{t\in T}$ jest procesem Markowa z macierzą przejścia $(p_{s,t}(k,l))$ wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ i $k_1, \ldots, k_n \in E$
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{t_1} = k_1, \ldots, &X_{t_n} = k_n)\\ &= \mathbb{P}(X_{t_1} = k_1)p_{t_1,t_2}(k_1,k_2)\cdots p_{t_{n-1},t_n}(k_{n-1},k_n).\end{aligned}$$

4. Wykaż, że proces Poissona N_t jest procesem Markowa i znajdź macierz przejścia.

5. Wykaż, że proces $(-1)^{N_t}$ jest procesem Markowa i znajdź macierz przejścia.

6. Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots$ są zmiennymi o jednakowym rozkładzie μ, $S_k = \sum_{n=1}^k X_k$, $M_k = \max(X_1, \ldots, X_k)$. Czy następujące procesy (z czesem dysktretnym) muszą być procesami Markowa, jeśli tak, to znajdź odpowiednie funkcje przejścia
a) $X_1, X_2, \ldots$
b) $S_0, S_1, S_2, \ldots$
c) $S_0^+, S_1^+, S_2^+, \ldots$
d) $M_1, M_2, M_3, \ldots$
e) $S_0, S_0 \vee S_1, S_0 \vee S_1 \vee S_2, \ldots$
f) $(S_n, M_n)_{n=1}^\infty$.

7. Niech X, Y będą zmiennymi losowymi, zaś $\mathcal{G}$–σ ciałem takim, że X jest $\mathcal{G}$-mierzalne, zaś Y jest niezależne od $\mathcal{G}$. Wykaż, że dla dowolnej funkcji $f(x,y)$ mierzalnej i ograniczonej $\mathbb{E}(f(X,Y)|\mathcal{G}) = \varphi(X)$ gdzie $\varphi(x) = \mathbb{E}f(x,Y)$.

8. Korzystając z poprzedniego zadania udowodnij, że jeśli $X = (X_t)$ jest procesem o przyrostach niezależnych to X jest procesem Markowa z funkcją przejścia $P_{s,t}(x,\Gamma) = \mathbb{P}(X_t - X_s \in \Gamma - x)$.

9. Z poprzedniego zadania wynika w szczególności, że proces Wienera jest procesem Markowa, czyli również i proces $(W_{-t})_{t\leqslant 0}$. Znajdź funkcję przejścia dla tego procesu.

10. Czy procesy $(|W_t|)$, (tW_{t^2}) są procesami Markowa? Jeśli tak to znajdź funkcje przejścia.

Zadania z Procesów Stochastycznych 6

1. Załóżmy, że $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Markowa o gęstości przejścia $p(t,x,y)$, $X_0 = 0$. Wyraź następujące prawdopodobieństwa przy pomocy gęstości przejścia:
a) $\mathbb{P}(X_t \geqslant 0)$
b) $\mathbb{P}(0 < X_s < X_t)$ dla $s < t$.

2. Załóżmy, że przestrzeń stanów $E = \{1,2\}$. Sprawdź równania Chapmana-Kołmogorowa dla macierzy przejścia
$$P^t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3+2e^{-7t} & 2-2e^{-7t} \\ 3-3e^{-7t} & 2+3e^{-7t} \end{pmatrix}$$

3. Czy istnieją takie funkcje $a(t)$, $b(t)$, że
$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} a(t) & 3-3e^{-2t} \\ 4-4e^{-2t} & b(t) \end{pmatrix}.$$
jest macierzą przejścia dla pewnego jednorodnego procesu Markowa na dwuelementowej przestrzeni stanów?

4. a) Załóżmy, że funkcja przejścia P dla $0 \leqslant s \leqslant t$, $x \in \mathbb{R}$, $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ma postać
$$P(s,t,x,\Gamma) = \int_\Gamma \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{s,t}^2}} \exp\left(-\frac{(y-m_{s,t}x)^2}{2\sigma_{s,t}^2}\right) dy,$$
jeśli $\sigma_{s,t}^2 \neq 0$, a $P(s,t,x,\cdot) = \delta_{xm_{s,t}}$ w przeciwnym przypadku. (tzn. $P(s,t,x,\cdot)$ jest rozkładem normalnym o średniej $m_{s,t}x$ i wariancji $\sigma_{s,t}^2$). Jakie warunki muszą spełniać $m_{s,t}$ i $\sigma_{s,t}^2$ by istniała rodzina Markowa o funkcji przejścia P?
b) Jakie warunki muszą spełniać $m_{s,t}$ i $\sigma_{s,t}^2$, żeby ta rodzina Markowa była jednorodna?

5. Sprawdź, że procesy Wienera i Poissona są procesami fellerowskimi.

6. Niech $(W_t)_{t\geqslant 0}, (P_x)_{x\geqslant 0}$ będzie jednorodną rodziną Wienera, a P^W funkcją przejścia związaną z tą rodziną. Zdefiniujmy
$$X_t(\omega) = \begin{cases} W_t(\omega) & \text{jeśli } W_0(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{jeśli } W_0(\omega) = 0 \end{cases}$$
oraz
$$P(t,x,\Gamma) = \begin{cases} P^W(t,x,\Gamma) & \text{jeśli } x \neq 0 \\ \delta_0(\Gamma) & \text{jeśli } x = 0. \end{cases}$$
Udowodnij, że rodzina $(X_t)_{t\geqslant 0}(P_x)_{x\in\mathbb{R}}$ jest jednorodną rodziną Markowa z funkcją przejścia P zdefiniowaną powyżej, ale nie jest mocno Markowa.

Zadania z Procesów Stochastycznych 7

1. Wykaż, że jeśli τ jest momentem zatrzymania względem filtracji $\mathcal{F}_t^W$ takim, że $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$, to proces $(W_{t+\tau} - W_\tau)_{t \geqslant 0}$ jest procesem Wienera niezależnym od $\mathcal{F}_\tau^W$.

2. (**Zasada odbicia dla procesu Wienera**)
Niech W_t będzie procesem Wienera startującym z 0 oraz dla $a \neq 0$
$$\tau_a := \inf\{t \colon W_t = a\}.$$
Wykaż, że
a) $\mathbb{P}(\tau_a \leqslant u, W_u \in \Gamma) = \mathbb{P}(\tau_a \leqslant u, W_u \in 2a - \Gamma)$;
b) $\mathbb{P}(\tau_a \leqslant u) = 2\mathbb{P}(W_u \geqslant a)$ dla $a > 0$.
c) Znajdź rozkład zmiennej $\sup_{0 \leqslant t \leqslant u} W_t$.

3. Przy notacji z poprzedniego zadania udowodnij, że
d) $\tau_a \sim a^2 \tau_1$;
e) $\tau_{a+b} \sim \tau_a + \tilde{\tau}_b$ dla $a, b > 0$, gdzie $\tilde{\tau}_b$ jest niezależną kopią τ_b;
f) $s\tau_1 + t\tilde{\tau}_1 \sim (\sqrt{s} + \sqrt{t})^2 \tau_1$ dla $s, t > 0$.

4. Załóżmy, że (X_t) ma mocną własność Markowa względem $(\mathcal{F}_t)$ z funkcją przejścia P. Wykaż, że dla dowolnego momentu zatrzymania τ takiego, że $\tau < \infty$ p.n. $(X_{\tau+t})$ jest procesem Markowa względem $(\mathcal{F}_{\tau+t})$. Ile wynosi jego funkcja przejścia?

5. Niech $(W_t)_{t \geqslant 0}, (P_x)_{x \in \mathbb{R}}$ będzie wienerowską jednorodną rodziną Markowa. Niech ponadto $\tau := \inf\{t \geqslant 0 : W_t = 0\}$ i oznaczmy $W_t^\tau = W_{\tau \wedge t}$. Udowodnij, że $(W_t^\tau)_{t \geqslant 0}, (P_x)_{x \in \mathbb{R}_+}$ jest jednorodną rodziną Markowa i znajdź jej funkcję przejścia.

6. Załóżmy, że rodzina Markowa (X_t), $(\mathbb{P}_x)$ ma mocną własność Markowa względem $\mathcal{F}_t$, zaś (θ_s) jest jej operatorem przesunięcia. Wykaż, że dla dowolnego $A \in \mathcal{F}_\infty^X$ i dowolnego momentu zatrzymania τ, który jest $\mathcal{F}_\infty^X$-mierzalny zachodzi
$$\mathbb{P}_x(\theta_\tau^{-1} A | \mathcal{F}_\tau) = \mathbb{P}_{X_\tau}(A) \quad \text{p.n. na zbiorze } \tau < \infty.$$

Zadania z Procesów Stochastycznych 8

1. Załóżmy, że X_t jest rodziną Markowa na dwuelementowej przestrzeni stanów z macierzą przejścia
$$P^t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3+2e^{-7t} & 2-2e^{-7t} \\ 3-3e^{-7t} & 2+3e^{-7t} \end{pmatrix}.$$
Znajdź generator A półgrupy generowanej przez X_t.

2. Niech A będzie generatorem półgrupy związanej z d-wymiarowym procesem Wienera. Wykaż, że jeśli $f \in C_u^2(\mathbb{R}^d)$ to $f \in D_A$ oraz $Af = \frac{1}{2}\Delta f$. Tu i dalej $C_u^2(E)$ oznacza funkcje klasy C^2 z E w $\mathbb{R}$ ograniczone i jednostajnie ciągłe oraz mające ograniczone i jednostajnie ciągłe pochodne do rzędu 2 włącznie.

3. Wykaż, że dla jednowymiarowego procesu Wienera
$$R_\lambda f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-\sqrt{2\lambda}|x-y|}dy$$

4. Wykaż, że dla jednowymiarowego procesu Wienera $D_A = C_u^2(\mathbb{R})$.

5. Niech $(W_t)_{t\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}}$ będzie jednorodną rodziną Wienera. Znajdź generator infinitezymalny (razem z jego dziedziną!) rodzin Markowa:
a) $(|W_t|)_{t\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\geqslant 0}$
b) $(W_t^\tau)_{t\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\geqslant 0}$, gdzie $\tau = \inf\{t \geqslant 0\colon\ W_t = 0\}$ oraz $W_t^\tau = W_{t\wedge\tau}$.

6. Niech $X_t = e^{-t}W_{e^{2t}}$. Wykaż, że X jest jednorodnym procesem Markowa i znajdź Af dla odpowiednio gładkiej funkcji f.

Zadania z Procesów Stochastycznych 9

1. Niech $(X_t, \mathbb{P}_x)_{t\geqslant 0, x\in E}$ będzie jednorodnym procesem Markowa względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ z generatorem $(A, D(A))$. Załóżmy ponadto, że X_t jest prognozowalnie mierzalny. Wykaż, że dla $f \in D(A)$ proces
$$M_t^f := f(X_t) - \int_0^t Af(X_s)ds$$
jest martyngałem względem każdej miary $\mathbb{P}_x$.

2. Znajdź generator (łącznie z dziedziną) dla Poissonowskiej rodziny Markowa.

3. i) Znajdź rozkład stacjonarny dla procesu Markowa o wartościach dwuelementowej przestrzeni stanów $\{1, 2\}$ o generatorze infinitezymalnym
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$
ii) Znajdź macierz przejścia dla tego procesu.

4. Niech $(X_t)_{t\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\{1,2,3\}}$ będzie jednorodną rodziną Markowa o wartościach w trójelementowej przestrzeni stanów $\{1, 2, 3\}$, prawostronnie ciągłych trajektoriach i generatorze infinitezymalnym
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
Niech $\tau_1 = \inf\{t : X_t \neq 1\}$, $\sigma_1 = \inf\{t \geqslant \tau_1 : X_t = 1\}$. Oblicz wartość oczekiwaną σ_1 jeśli proces startuje ze stanu 1. (tzn. $E_1\sigma_1$).

5. i) Udowodnij, że nie istnieje rozkład stacjonarny dla procesu Wienera.
ii) Wykaż, że miara Lebesgue'a jest miarą niezmienniczą dla procesu Wienera.

Zadania z Procesów Stochastycznych 10

1. Niech $(X_t)_{t\geqslant 0}, (\mathbb{P}_i)_{i\in E}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa z czasem ciągłym o prawostronnie ciągłych trajektoriach, zaś $\Gamma \subset E$. Określmy $\sigma := \inf\{t \geqslant 0\colon\ X_t \in \Gamma\}$ oraz $m_i := \mathbb{E}_i\sigma$. Wykaż, że (przy notacji z wykładu) $m_i = 0$ dla $i \in \Gamma$ oraz
$$m_i = \frac{1}{\lambda_i} + \sum_{j\neq i} q_{ij}m_j, \qquad \text{jeśli } i \notin \Gamma, \lambda_i > 0.$$

2. Niech $(X_t)_{t\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E}$ będzie jednorodną rodziną Markowa o wartościach w przestrzeni polskiej (E, ρ). Wykaż, że dla dowolnego $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant t$ i $\varepsilon > 0$,
$$\mathbb{P}_x\left(\max_k \rho(x, X_{t_k}) > 2\varepsilon\right) \leqslant 2\alpha_\varepsilon(t) := 2 \sup_{0\leqslant s\leqslant t}\sup_{y\in E}\mathbb{P}_y(\rho(y, X_s) > \varepsilon).$$
Wywnioskuj stąd, że jeśli X_t jest prawostronnie ciągły, to
$$\mathbb{P}_x\left(\sup_s \rho(x, X_s) > 2\varepsilon\right) \leqslant 2\alpha_\varepsilon(t).$$

3. Niech $(X_t)_{t\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\{1,2\}}$ będzie prawostronnie ciągłą jednorodną rodziną Markowa o generatorze infinitezymalnym
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$
Znajdź funkcję charakterystyczną zmiennej losowej $\int_0^t \mathbb{1}_{\{1\}}(X_s)ds$ przy $\mathbb{P}_1$ i przy $\mathbb{P}_2$.

4. Niech $f \in C_u^2(\mathbb{R}^d)$ oraz $\rho \in \mathbb{R}$. Znajdź rozwiązanie $u(t, x)$ równania
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \rho u + \frac{1}{2}\Delta u$$
$$u(0, x) = f(x).$$

5. Niech $(T_t)_{t\geqslant 0}$ będzie półgrupą kontrakcji na $F = B_{\mathrm{ogr}}(E)$. Wykaż, że dla $g \in F_0$ $v(t, x) := \int_0^t T_s g(x)ds$ jest jedynym rozwiązaniem o wzroście co najwyżej liniowym równania
$$\frac{\partial v}{\partial t} = Av(t, x) + g(x), \quad v(0, x) = 0$$
takim, że v i $\frac{\partial v}{\partial t}$ są ciągłe z $[0, \infty)$ w F.

Zadania z Procesów Stochastycznych 11

1. Niech $(W_t)_{t\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}}$ będzie rodziną Wienera w $\mathbb{R}^2$, zaś D wnętrzem kąta w $\mathbb{R}^2$ o rozwartości α. Przez $\tau = \tau_D$ oznaczmy pierwszy moment wyjścia W ze zbioru D. Udowodnij, że
   (a) Jeśli $\alpha < \frac{\pi}{2}$ to $E_x\tau < \infty$ $\forall x \in D$.
   (b) Jeśli $\alpha \geqslant \frac{\pi}{2}$ to $E_x\tau = \infty$ $\forall x \in D$.
   Wskazówki: (a) rozpatrzeć funkcję $h(r,\varphi) = r^2\sin(\rho(\alpha+\varepsilon-\varphi))$ *we współrzędnych biegunowych. (b) Przyjąć* $\alpha = \frac{\pi}{2}$ *i korzystając z zasady odbicia oszacować ogon* τ.

2. Niech $(X_t)_{t\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}}$ będzie jednowymiarowym procesem dyfuzji, ze współczynnikiem dyfuzji a i współczynnikiem dryfu b (obie funkcje ciągłe),przy czym a jest takie, że $a(x) > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Niech $D = (\alpha, \beta)$ oraz $\tau = \tau_D$ będzie pierwszym momentem wyjścia z D. Wykaż, że $\mathbb{E}_x\tau < \infty$ oraz oblicz $\mathbb{P}_x(X_\tau = \alpha)$ dla $x \in D$.

3. Niech $(W_t)_{t\geqslant 0}$, $(\mathbb{P}_x)$ będzie rodziną Wienera w $\mathbb{R}^d$, D kulą o środku w zerze i promieniu R, a $\tau = \tau_D$ pierwszym moment wyjścia procesu Wienera z D. Oblicz $E_x\tau$ dla $x \in D$.

4. Niech D będzie półprzestrzenią w $\mathbb{R}^d$, $D = \{(x_1, \ldots, x_d)\colon\ x_d > 0\}$, $d \geqslant 2$. Znajdź jądro Poissona dla D, tzn. taką funkcję $h(x, y)$, że każde ograniczone rozwiązanie u zagadnienia Dirichleta

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\Delta u(x) = 0, && \text{dla } x \in D \\ &u(x) = f(x) && \text{dla } x \in \partial D \end{aligned} .$$

   jest postaci $u(x) = \int_{\partial D} f(y)h(x,y)dy$ dla dowolnej ciągłej i ograniczonej funkcji $f : \partial D \mapsto \mathbb{R}$.