

Zadania z Procesów Stochastycznych 1

Definicja *Procesem Poissona z parametrem (intensywnością) $\lambda > 0$ nazywamy proces stochastyczny $N = (N_t)_{t \geq 0}$ taki, że*

$$N_0 = 0; \quad (\text{P0})$$

$$N \text{ ma przyrosty niezależne}; \quad (\text{P1})$$

(tzn. dla dowolnych $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ zmienne $N_{t_0}, N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ są niezależne)

$$\text{Dla } 0 \leq s \leq t \text{ zmienna } N_t - N_s \text{ ma rozkład } \text{Poiss}(\lambda(t-s)); \quad (\text{P2})$$

$$\text{Trajektorie } N \text{ są prawostronnie ciągłe.} \quad (\text{P3})$$

1. Oblicz $\mathbf{P}(N_1 = 1, N_2 = 4, N_4 = 5)$ oraz $\mathbf{P}(N_1 = N_2 < N_3 - 1)$.
2. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Poissona są niemalejące, przyjmują wartości z \mathbb{Z}_+ , mają wszystkie skoki równe 1 oraz dążą do nieskończoności.
3. Wykaż, że moment pierwszego skoku w procesie Poissona

$$S_1 := \inf\{t : N_t > 0\}$$

jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ .

4. Niech

$$S_k := \inf\{t : N_t = k\}$$

będzie momentem k -tego skoku w procesie Poissona. Wykaż, że odstęp między skokami

$$T_1 = S_1, T_2 = S_2 - S_1, T_3 = S_3 - S_2, \dots$$

są zmiennymi niezależnymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym.

5. Udowodnij, że $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} = \lambda$ p.n.
6. Niech $N_t^{(1)}$ i $N_t^{(2)}$ będą niezależnymi procesami Poissona. Wykaż, że $N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$ jest procesem Poissona
7. Liczba wyświetleń pewnej strony internetowej do chwili $t - N_t$ jest procesem Poissona z intensywnością λ . Każde wyświetlenie z prawdopodobieństwem p jest dokonywane spoza Polski (niezależnie dla każdego wyświetlenia i niezależnie od procesu N). Niech $N_t^{(1)}$ będzie liczbą wyświetleń strony spoza Polski, a $N_t^{(2)}$ z Polski. Wykaż, że $N_t^{(1)}$ i $N_t^{(2)}$ są niezależnymi procesami Poissona.

8. Załóżmy, że $X = (X_t)_{t \geq 0}$ jest procesem stratującym z zera, przyjmującym wartości całkowite nieujemne, o niezależnych, stacjonarnych przyrostach i prawostronnie ciągłych i niemalejących trajektoriach. Ponadto załóżmy, że

$$\mathbf{P}(X_t = 1) = \lambda t + o(t), \quad \mathbf{P}(X_t \geq 2) = o(t) \quad \text{przy } t \rightarrow 0+.$$

Wykaż, że X jest procesem Poissona.

9. (Złożony proces Poissona) Załóżmy, że N jest procesem Poissona, a Y_1, Y_2, \dots jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, niezależnym od N . Niech

$$X_t = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N_t} Y_k & \text{jeśli } N_t > 0 \\ 0 & \text{jeśli } N_t = 0. \end{cases}$$

Wykaż, że X jest procesem o niezależnych i stacjonarnych przyrostach.

Zadania z Procesów Stochastycznych 2

1. Udowodnij, że następujące procesy też są procesami Wienera
 - a) $X_t = -W_t$ (odbicie)
 - b) $Y_t = c^{-1/2}W_{ct}$, $c > 0$ (przeskalowanie czasu)
 - c) $Z_t = tW_{1/t}$ dla $t > 0$ oraz $Z_0 = 0$ (inwersja czasu)
 - d) $U_t = W_{T+t} - W_T$, $T \geq 0$
 - e) $V_t = W_t$ dla $t \leq T$, $V_t = 2W_T - W_t$ dla $t > T$, gdzie $T \geq 0$.
2. Udowodnij, że $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{t} = 0$ p.n.
3. Niech $\pi_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{k_n}^{(n)}\}$, gdzie $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_{k_n}^{(n)} = b$ będzie ciągiem podziałów odcinka $[a, b]$ oraz $\|\pi_n\| = \max_k |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}|$ oznacza średnicę π_n . Udowodnij, że

$$S_n = \sum_{k=1}^{k_n} |W_{t_k^{(n)}} - W_{t_{k-1}^{(n)}}|^2 \rightarrow b - a, n \rightarrow \infty \text{ w } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P),$$

jeśli $\|\pi_n\| \rightarrow 0$ oraz $S_n \rightarrow b - a$ p.n., jeśli $\sum_n \|\pi_n\| < \infty$.

4. Udowodnij, że prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera mają nieskończone wahanie na każdym przedziale.
5. Wykaż, że jeśli proces stochastyczny $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ma przyrosty niezależne i stacjonarne, trajektorie ciągłe, $X_0 = 0$, $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 = 1$ oraz $\mathbf{E}X_t^4 < \infty$ dla wszystkich t , to X jest procesem Wienera.
6. Niech $f_i(t)$ będzie dowolną bazą $L_2[0, 1]$, $h_i(t) = \int_0^t f_i(s)ds$ oraz niech g_i będzie ciągiem niezależnych zmiennych $\mathcal{N}(0, 1)$. Wykaż, że szereg $X_t = \sum_i g_i h_i(t)$ jest zbieżny w L^2 dla dowolnego $t \in [0, 1]$ oraz X_t ma te same rozkłady skończenie wymiarowe co proces Wienera.
7. Niech $I(0) = \{1\}$, $I(n) = \{1, \dots, 2^{n-1}\}$, $n = 1, 2, \dots$. Układem Haara nazywamy rodzinę funkcji $(h_{n,k})_{n=0,1,\dots,k \in I(n)}$ określonych na $[0, 1]$ wzorami $h_{0,1}(t) \equiv 1$ oraz dla $n = 1, 2, \dots, k \in I(n)$,

$$h_{n,k}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} & (2k-2)2^{-n} \leq t < (2k-1)2^{-n} \\ -2^{\frac{n-1}{2}} & (2k-1)2^{-n} \leq t < 2k2^{-n} \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Układem Schaudera nazywamy rodzinę funkcji $(S_{n,k})_{n=0,1,\dots,k \in I(n)}$ określonych na $[0, 1]$ wzorem $S_{n,k}(t) = \int_0^t h_{n,k}(s)ds$. Niech $(g_{n,k})_{n=0,1,\dots,k \in I(n)}$ będzie rodziną niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$, połączmy

$$W_t^{(n)}(\omega) = \sum_{m=0}^n \sum_{k \in I(m)} g_{m,k}(\omega) S_{m,k}(t).$$

Wykaż, że dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ ciąg funkcji $(W_t^{(n)}(\omega))$ zbiega jednostajnie na $[0, 1]$ do pewnej funkcji ciągłej $W_t(\omega)$. Jeśli określimy np. $W_t(\omega) = 0$ dla pozostałych ω to tak zdefiniowany proces stochastyczny jest procesem Wienera na $[0, 1]$.

Zadania z Procesów Stochastycznych 3

1. Udowodnij, że jeśli zbiór $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ to istnieje zbiór przeliczalny $T_0 \subset T$ taki, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}^T$ oraz $x(t) = y(t)$ dla $t \in T_0$ to $x \in A \Leftrightarrow y \in A$.
2. Niech $T = [a, b]$ $a < t_0 < b$, wykaż, że następujące zbiory nie należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$.
 $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^T : \sup_{t \in [a, b]} |x_t| \leq 1\}$;
 $A_2 = \{x \in \mathbb{R}^T : t \rightarrow x_t \text{ ciągle na } [a, b]\}$;
 $A_3 = \{x \in \mathbb{R}^T : \lim_{t \rightarrow t_0} x_t = 0\}$;
 $A_4 = \{x \in \mathbb{R}^T : t \rightarrow x_t \text{ ciągle w } t_0\}$.
Wykaż mierzalność tych zbiorów przy założeniu ciągłości (prawostronnej ciągłości) trajektorii tzn. wykaż, że wszystkie te zbiory po przecięciu z $C(T)$ ($RC(T)$ odp.) należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \cap C(T)$ ($\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \cap RC(T)$ odp.).
3. Niech $T = [a, b]$. Wykaż, że $\mathcal{F} = \{A \cap C(T) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)\}$ jest sigma ciałem zbiorów borelowskich (w metryce supremum) na $C(T)$.
4. Wykaż, że dla dowolnej rodziny miar probabilistycznych μ_t istnieje rodzina niezależnych zmiennych losowych X_t taka, że $X_t \sim \mu_t$.
5. Wykaż, że istnieje proces $(X_t)_{t \geq 0}$ o przyrostach niezależnych, startujący z 0 taki, że $X_t - X_s$ ma rozkład Cauchy'ego z parametrem $t - s$ (proces taki nazywamy procesem Cauchy'ego, bądź procesem 1-stabilnym).
6. Proces X jest modyfikacją procesu Wienera. Które z następujących własności są spełnione dla procesu X :
 - a) niezależność przyrostów,
 - b) stacjonarność przyrostów,
 - c) ciągłość trajektorii,
 - d) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = 0$ p.n.
 - e) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = 0$ według prawdopodobieństwa?
7. Rozpatrzmy następujące 3 własności procesów:
 - a) ciągłość trajektorii;
 - b) stochastyczną ciągłość (tzn. $X_t \xrightarrow{\mathbf{P}} X_s$ gdy $t \rightarrow s$);
 - c) ciągłość wg p -tego momentu (tzn. $\mathbf{E}|X_t - X_s|^p \rightarrow 0$ gdy $t \rightarrow s$).Jakie implikacje zachodzą między powyższymi własnościami?

Zadania z Procesów Stochastycznych 4

1. Wykaż, że prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera są lokalnie hölderowskie z dowolnym wykładnikiem $\gamma < 1/2$.
2. Wykaż, że trajektorie procesu Wienera nie są lokalnie $1/2$ -hölderowskie
3. Wykaż, że trajektorie procesu Wienera z prawdopodobieństwem 1 nie są jednostajnie ciągłe na $[0, \infty)$
4. Scentrowany proces gaussowski nazywany ułamkowym ruchem Browna, jeśli $\mathbf{E}|X_t - X_s|^2 = |t - s|^{2\alpha}$ (można wykazać, że taki proces istnieje dla $0 < \alpha < 1$). Udowodnij, że ułamkowy ruch Browna ma ciągłą modyfikację. Co można powiedzieć o hölderowskości jej trajektorii?
5. Pokaż, że jeśli $X_\lambda \sim \text{Poiss}(\lambda)$ i $\lambda \leq 1$ to dla dowolnego $p > 0$, $\mathbf{E}|X_\lambda|^p \leq C_p \lambda$, gdzie $C_p = \mathbf{E}|X_1|^p < \infty$. Wywnioskuj stąd, że w Twierdzeniu o ciągłej modyfikacji założenie $\beta > 0$ jest istotne.
6. Policz funkcję kowariancji mostu Browna $W_t - tW_1$.
7. Wykaż za pomocą funkcji kowariancji, że procesy z zadania 7 z 1 serii są procesami Wienera.
8. Wykaż, że proces gaussowski ma przyrosty niezależne wtedy i tylko wtedy gdy jego funkcja kowariancji spełnia $K(t, u) = K(s, u)$ dla $t, s \geq u$ (czyli $K(t, s) = \varphi(t \wedge s)$ dla pewnej funkcji φ).
9. Mówimy, że proces stochastyczny $X = (X_t)$ jest stacjonarny jeśli dla dowolnego h proces X ma ten sam rozkład co $X^{(h)} := (X_{t+h})$. Wykaż, że scentrowany proces gaussowski jest stacjonarny wtedy i tylko wtedy gdy $K(t+h, s+h) = K(t, s)$ dla wszystkich t, s, h (czyli $K(t, s) = \varphi(|t-s|)$ dla pewnej funkcji φ).
10. Wykaż, że proces Ornsteina-Uhlenbecka $G_t = e^{-t}W_{e^{2t}}$ jest procesem stacjonarnym.

Zadania z Procesów Stochastycznych 5

- Które z następujących procesów są gaussowskie:
 - W_{3t} ; b) $|W_t|$; c) $tW_t + W_1$; d) $W_t I_{W_t \geq 0}$; e) $W_t W_{t-1}$; f) $t^2 + W_{4t}$?
- Czy proces $(W_t 1_{W_t \neq 1})_{t \geq 0}$
 - ma ciągle trajektorie, b) ma modyfikację ciągłą, c) jest nieodróżnialny od procesu ciągłego, d) jest procesem gaussowskim?
- Niech $f = \sum_{i=1}^n a_i I_{[t_{i-1}, t_i)}$, gdzie $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ będzie funkcją kawałkami stałą. Przyporządkujmy takiej funkcji zmienną $I(f) = \sum_{i=1}^n a_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$. Udowodnij, że:
 - $I(f)$ jest zmienną losową o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, \sigma_f^2)$, gdzie $\sigma_f^2 = \int_0^\infty f^2(x) dx$.
 - Zmienne $I(f_1), I(f_2)$ dla f_1, f_2 postaci jak wyżej. mają łączny rozkład gaussowski oraz $\text{Cov}(I(f_1), I(f_2)) = \int_0^\infty f(x)g(x) dx$.
 - Przekształcenie I rozszerza się do izometrii z $L^2([0, \infty))$ w $L^2(\Omega)$ i własności a) b) zachodzą dla $f, f_1, f_2 \in L^2([0, \infty))$.
 - Przekształcenie I z punktu c) po przeskalowaniu przez odpowiednią stałą jest izometrycznym włożeniem $L^2([0, \infty))$ w $L^p(\Omega)$ dla dowolnego $1 \leq p < \infty$.
Tak zdefiniowane $I(f)$ nazywa się całką Wienera-Paleya i się często oznacza $I(f) = \int_0^\infty f(s) dW_s$.
- Niech X_1, X_2, \dots będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie z dystrybuantą F . Niech

$$Y_t^{(n)} = \frac{\#\{i: X_i \leq t\}}{n} - F(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

Wykaż, że skończenie wymiarowe rozkłady procesów $\sqrt{n}Y^{(n)}$ zbiegają przy $n \rightarrow \infty$ do rozkładu pewnego procesu gaussowskiego Z , wyznacz funkcję wartości średniej i kowariancję Z .

- Wykaż, że trajektorie procesu Wienera z prawdopodobieństwem 1 przecinają zero dowolnie daleko.

Zadania z Procesów Stochastycznych 6

W poniższych zadaniach przyjmujemy, że $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ jest ustaloną filtracją, zaś τ zmienną losową o wartościach w $T \cup \{\infty\}$.

1. Dla $T = \{1, 2, \dots\}$ wykaż, że τ jest momentem zatrzymania wtedy i tylko wtedy, gdy $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ dla $n \in T$.
2. Niech $T = \{1, 2, \dots\}$, $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ będą borelowskimi podzbiorami \mathbb{R} , a X_n ciągiem \mathcal{F}_n -adaptowanym. Określamy indukcyjnie dla $i = 2, 3, \dots$

$$\tau_1 := \inf\{n: X_n \in \Gamma_1\} \text{ oraz } \tau_i := \inf\{n > \tau_{i-1}: X_n \in \Gamma_i\}.$$

Wykaż, że τ_i są momentami zatrzymania.

3. Załóżmy, że T jest przedziałem i określmy:

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, \quad \mathcal{F}_{t-} := \sigma\left(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s\right).$$

- a) Wykaż, że filtracja \mathcal{F}_{t+} jest prawostronnie ciągła, tzn. $\mathcal{F}_{t++} = \mathcal{F}_{t+}$.
 - b) Udowodnij, że jeśli $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X$ jest filtracją generowaną przez proces X o lewostronnie ciągłych trajektoriach, to $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t$.
 - c) Niech $T = [0, \infty)$, $A \in \mathcal{F}$ oraz $X_t = (t-1)^+ I_A$. Znajdź \mathcal{F}_t^X .
 - d) Dla X jak w punkcie c) określmy $\tau := \inf\{t: X_t > 0\}$. Wykaż, że τ nie jest momentem zatrzymania względem \mathcal{F}_t^X ale jest momentem zatrzymania względem \mathcal{F}_{t+}^X .
4. Załóżmy, że T jest przedziałem, wykaż, że:
 - a) jeśli τ jest momentem zatrzymania, to $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich t
 - b) jeśli $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich t , to τ jest momentem zatrzymania względem \mathcal{F}_{t+} .
 5. Niech $T = [0, \infty)$, a τ będzie momentem zatrzymania, które ze zmiennych $\tau + 1, \tau^2, \tau - 1$ muszą być momentami zatrzymania?
 6. Niech $T = [0, \infty)$, a X_t procesem \mathcal{F}_t -adaptowanym o ciągłych trajektoriach. Wykaż, że dla A otwartego $\tau_A := \inf\{t: X_t \in A\}$ jest momentem zatrzymania względem \mathcal{F}_{t+} .
 7. Wykaż, że jeśli τ i σ są momentami zatrzymania to zdarzenia $\{\tau < \sigma\}$, $\{\tau = \sigma\}$ i $\{\tau \leq \sigma\}$ należą do \mathcal{F}_τ , \mathcal{F}_σ i $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$.
 8. Wykaż, że jeśli τ jest momentem zatrzymania, to proces $X_t := I_{[0, \tau)}(t)$ jest progresywnie mierzalny.
 9. Niech τ będzie momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, a (X_t) będzie procesem \mathcal{F}_t -adaptowanym. Wykaż, że
 - a) τ jest \mathcal{F}_τ -mierzalne
 - b) Jeśli τ przyjmuje przeliczalnie wiele wartości, to X_τ jest \mathcal{F}_τ mierzalny na zbiorze $\tau < \infty$.

10. Do założeń poprzedniego zadania dodajmy, że T jest przedziałem, a X jest prawostronnie ciągły. Udowodnij, że:
 - a) X jest progresywnie mierzalny,
 - b) X_τ jest \mathcal{F}_τ mierzalny.
11. Wykaż, że jeśli σ jest momentem zatrzymania, $\tau \geq \sigma$ oraz τ jest \mathcal{F}_σ mierzalny, to τ jest momentem zatrzymania.
12. Niech $X = (X_t)_{t \geq 0}$ będzie procesem o niezależnych przyrostach, zaś \mathcal{F}_t filtracją generowaną przez X . Wykaż, że dla $t > s$ zmienna $X_t - X_s$ jest niezależna od sigma ciała \mathcal{F}_t , a jeśli X ma prawostronnie ciągłe trajektorie, to również od \mathcal{F}_{t+} .

Zadania z Procesów Stochastycznych 7

1. Sprawdź, że następujące rodziny są martyngalami

- $(N_t - \lambda t, \mathcal{F}_t^N)_{t \geq 0}$
- $((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t, \mathcal{F}_t^N)_{t \geq 0}$
- $(W_t, \mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$
- $(W_t^2 - t, \mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$
- $(\exp(\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}), \mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$.

2. Wykaż, że dla $t, u > 0$,

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} W_s \geq u\right) \leq \exp\left(-\frac{u^2}{2t}\right).$$

3. (Prawo iterowanego logarytmu dla procesu Wienera) Wykaż, że

- $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1$ p.n.
- $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = -1$ p.n.

Wskazówki:

i) Niech $C > 1$ oraz $u > C^{1/2}$. Wykaż, że

$$\sum_n \mathbf{P}\left(\sup_{C^n \leq t \leq C^{n+1}} W_t \geq u\sqrt{2C^n \ln \ln C^n}\right) < \infty$$

i wywnioskuj stąd, że $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} \leq u$ p.n.

ii) Wykaż, że $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} \leq 1$ p.n. oraz $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} \geq -1$ p.n.

iii) Udowodnij, że dla $g \sim \mathcal{N}(0, 1)$ i $t > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right) e^{-t^2/2} \leq \mathbf{P}(g \geq t) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t^2/2}.$$

iv) Wykaż, że dla $C > 1$ i $u < 1$

$$\sum \mathbf{P}(W_{C^n} - W_{C^{n-1}} \geq u\sqrt{1 - 1/C}\sqrt{2C^n \ln \ln C^n}) = \infty$$

i wywnioskuj stąd i z ii), że $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} \geq u(1 - 1/C)^{1/2} - C^{-1/2}$ p.n.

4. Udowodnij, że

- $\limsup_{t \rightarrow 0+} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln(1/t)}} = 1$ p.n.
- $\liminf_{t \rightarrow 0+} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln(1/t)}} = -1$ p.n.

Zadania z Procesów Stochastycznych 8

1. Załóżmy, że $\varphi(t)$ jest funkcją charakterystyczną symetrycznej zmiennej losowej X . Wykaż, że istnieje proces gaussowski, który ma funkcję kowariancji równą $K(t, s) = \varphi(|t - s|)$.
2. Niech τ będzie momentem zatrzymania względem \mathcal{F}_t^W .
 - a) Wykaż, że $(W_{\tau \wedge n}, \mathcal{F}_{\tau \wedge n})_{n=1}^\infty$ jest martyngałem.
 - b) Udowodnij, że jeśli $\mathbf{E}\tau < \infty$ to $\mathbf{E} \sup_n W_{\tau \wedge n}^2 < \infty$.
 - c) Wykaż, że jeśli $\mathbf{E}\tau < \infty$ to $\mathbf{E}W_\tau^2 = \mathbf{E}\tau$ i $\mathbf{E}W_\tau = 0$.

3. Niech W_t będzie jednowymiarowym procesem Wienera oraz

$$\tau_a := \inf\{t > 0: W_t = a\}, \quad \tilde{\tau}_a := \inf\{t > 0: |W_t| = a\}.$$

Rozpatrując martyngały W_t i $W_t^2 - t$ wykaż, że

- a) $\tau_a < \infty$ p.n. dla wszystkich $a \in \mathbb{R}$
 - b) $\mathbf{P}(\tau_a < \tau_{-b}) = \frac{b}{a+b}$ dla $a, b > 0$.
 - c) $\mathbf{E}\tilde{\tau}_a = a^2$ dla $a \geq 0$.
 - d) $\mathbf{E}\tau_a \wedge \tau_{-b} = ab$ dla $a, b > 0$.
 - e) $\mathbf{E}\tau_a = \infty$ dla wszystkich $a \neq 0$
4. Rozpatrując martyngały $M_t^\lambda = \exp(\lambda W_t - \lambda^2 t/2)$ oraz $N_t^\lambda = (M_t^\lambda + M_t^{-\lambda})/2$ wykaż, że przy oznaczeniach poprzedniego zadania, dla wszystkich $a, \lambda \geq 0$
 - a) $\mathbf{E}e^{-\lambda\tau_a} = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$
 - b) $\mathbf{E}e^{-\lambda\tilde{\tau}_a} = (\cosh(a\sqrt{2\lambda}))^{-1}$.
 5. Wykaż, że martyngał M_t^λ z poprzedniego zadania jest zbieżny p.n. i znajdź jego granicę. Czy jest on zbieżny w L^1 ?
 6. Wykaż, że rodzina $(X_t)_{t \in T}$ jest jednostajnie całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy zachodzą następujące dwa warunki:
 - i) $\sup_{t \in T} \mathbf{E}|X_t| < \infty$
 - ii) Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że $\mathbf{E}|X_t|I_A < \varepsilon$ dla wszystkich t , jeśli $\mathbf{P}(A) < \delta$.
 7. Które z podanych niżej warunków implikują jednostajną całkowalność ciągu X_n :
 - a) $\sup_n \mathbf{E}|X_n| < \infty$,
 - b) $\sup_n \mathbf{E}|X_n|^2 < \infty$,
 - c) $\mathbf{E} \sup_n |X_n| < \infty$,
 - d) zbieżność X_n w L_1 ,
 - e) zbieżność X_n p.n.?

Zadania z Procesów Stochastycznych 9

1. Niech $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^d)$ będzie d -wymiarowym procesem Wienera. Wykaż, że $(f(W_t), \mathcal{F}_t^W)$ jest
 - a) martyngałem, jeśli f jest harmoniczna
 - b) nadmartyngałem, jeśli f jest nadharmoniczna
 - c) podmartyngałem, jeśli f jest podharmoniczna

2. a) Wykaż, że jeśli f jest dwukrotnie różniczkowalna na \mathbb{R} oraz f, f', f'' są ograniczone, to

$$M_t = f(W_t) - f(W_0) - \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_u) du$$

jest martyngałem względem \mathcal{F}_t^W .

- b) Ogólniej, jeśli f jest dwukrotnie różniczkowalna na \mathbb{R}^d , pochodne cząstkowe f rzędu mniejszego niż 2 są ograniczone oraz W jest d -wymiarowym procesem Wienera, to

$$M_t = f(W_t) - f(W_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(W_u) du$$

jest martyngałem względem \mathcal{F}_t^W .

3. Niech $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^d)$ będzie d wymiarowym procesem Wienera, a $x_0 \in \mathbb{R}^d$ oraz $d > 2$.
 - a) Wykaż, że $|W_t - x_0|^{2-d}$ jest nieujemnym nadmartyngałem
 - b) Udowodnij, że $|W_t - x_0|^{2-d}$ zbiega przy $t \rightarrow \infty$ do 0 według prawdopodobieństwa i p.n. i wywnioskuj stąd, że $\lim_{t \rightarrow \infty} |W_t| = \infty$ p.n.
 - c) Wykaż, że $\mathbf{P}(\exists_{t>0} W_t = x_0) = 0$.

Zadania z Procesów Stochastycznych 10

1. Załóżmy, że przestrzeń stanów E jest przeliczalna. Wykaż, że wówczas
 - a) $(X_t)_{t \in T}$ jest procesem Markowa wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ i $k_1, \dots, k_n \in E$ takich, że $\mathbf{P}(X_{t_1} = k_1, \dots, X_{t_{n-1}} = k_{n-1}) \neq 0$

$$\mathbf{P}(X_{t_n} = k_n | X_{t_1} = k_1, \dots, X_{t_{n-1}} = k_{n-1}) = \mathbf{P}(X_{t_n} = k_n | X_{t_{n-1}} = k_{n-1}).$$
 - b) $(X_t)_{t \in T}$ jest procesem Markowa z macierzą przejścia $(p_{s,t}(k,l))$ wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ i $k_1, \dots, k_n \in E$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{t_1} = k_1, \dots, X_{t_n} = k_n) \\ = \mathbf{P}(X_{t_1} = k_1) p_{t_1, t_2}(k_1, k_2) \cdots p_{t_{n-1}, t_n}(k_{n-1}, k_n). \end{aligned}$$
2. Wykaż, że proces Poissona N_t jest procesem Markowa i znajdź macierz przejścia.
3. Wykaż, że proces $(-1)^{N_t}$ jest procesem Markowa i znajdź macierz przejścia.
4. Niech X, Y będą zmiennymi losowymi, zaś \mathcal{G} - σ ciałem takim, że X jest \mathcal{G} -mierzalne, zaś Y jest niezależne od \mathcal{G} . Wykaż, że dla dowolnej funkcji $f(x, y)$ mierzalnej i ograniczonej $\mathbf{E}(f(X, Y) | \mathcal{G}) = \varphi(X)$ gdzie $\varphi(x) = \mathbf{E}f(x, Y)$.
5. Korzystając z poprzedniego zadania udowodnij, że jeśli $X = (X_t)$ jest procesem o przyrostach niezależnych to X jest procesem Markowa z funkcją przejścia $P_{s,t}(x, \Gamma) = \mathbf{P}(X_t - X_s \in \Gamma - x)$.
6. Załóżmy, że X_1, X_2, \dots są zmiennymi o jednakowym rozkładzie μ , $S_k = \sum_{n=1}^k X_n$, $M_k = \max(X_1, \dots, X_k)$. Czy następujące procesy muszą być procesami Markowa, jeśli tak to znaleźć odpowiednie funkcje przejścia
 - a) X_1, X_2, \dots
 - b) S_0, S_1, S_2, \dots
 - c) $S_0^+, S_1^+, S_2^+, \dots$
 - d) M_1, M_2, M_3, \dots
 - e) $S_0, S_0 \vee S_1, S_0 \vee S_1 \vee S_2, \dots$
 - f) $(S_n, M_n)_{n=1}^\infty$.
7. Czy procesy $(|W_t|)$, (tW_{t^2}) są procesami Markowa? Jeśli tak to znajdź funkcje przejścia.

Zadania z Procesów Stochastycznych 11

1. Załóżmy, że przestrzeń stanów $E = \{1, 2\}$. Sprawdź równania Chapmana-Kołmogorowa dla macierzy

$$P^t = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 + 2e^{-4t} & 2 - 2e^{-4t} \\ 3 - 3e^{-4t} & 2 + 3e^{-4t} \end{pmatrix}.$$

2. Czy istnieją takie funkcje $a(t)$, $b(t)$, że

$$\frac{1}{7} \begin{pmatrix} a(t) & 3 - 3e^{-2t} \\ 4 - 4e^{-2t} & b(t) \end{pmatrix}.$$

jest macierzą przejścia dla pewnego jednorodnego procesu Markowa na dwuelementowej przestrzeni stanów?

3. Załóżmy, że dla $s < t$, $P_{s,t}(x, \cdot)$ jest rozkładem normalnym o średniej $m_{s,t}x$ i wariancji $\sigma_{s,t}^2$. Jakie warunki muszą spełniać $m_{s,t}$ i $\sigma_{s,t}^2$ by istniała rodzina Markowa o funkcji przejścia $P_{s,t}$?
4. Proces X_t jest jednorodnym procesem Markowa o gęstości przejścia $p_s(x, y)$. Wówczas
- i) dla $t > 0$, $\mathbf{P}_0(X_t \geq 0) = \dots\dots\dots$,
- ii) dla $s > t > 0$, $\mathbf{P}_0(X_s > X_t > 0) = \dots\dots\dots$
5. Procesy X_t i Y_t są procesami Markowa, czy z tego wynika, że proces (X_t, Y_t) też jest procesem Markowa?
6. Czy dla każdej funkcji ciągłej f , $f(W_t)$ jest procesem Markowa?

Zadania z Procesów Stochastycznych 12

1. Sprawdź, że procesy Wienera i Poissona są procesami fellerowskimi.
2. Wykaż, że proces Wienera ma mocną własność Markowa względem filtracji $\mathcal{F}_{\leq t+}^W$.
3. Niech W_t będzie procesem Wienera startującym z 0 oraz dla $a \neq 0$

$$\tau_a := \inf\{t: W_t = a\}.$$

Wykaż, że

- a) $\mathbf{P}(\tau_a \leq u, W_u \in \Gamma) = \mathbf{P}(\tau_a \leq u, W_u \in 2a - \Gamma)$;
 - b) $\mathbf{P}(\tau_a \leq u) = 2\mathbf{P}(W_u \geq a)$ dla $a > 0$.
 - c) $\tau_a \sim a^2\tau_1$;
 - d) $\tau_{a+b} \sim \tau_a + \tilde{\tau}_b$ dla $a, b > 0$, gdzie $\tilde{\tau}_b$ jest niezależną kopia τ_b ;
 - e) $s\tau_1 + t\tilde{\tau}_1 \sim (\sqrt{s} + \sqrt{t})^2\tau_1$ dla $s, t > 0$.
 - f) Znajdź rozkład zmiennej $\sup_{0 \leq t \leq u} W_t$.
4. Wykaż, że jeśli rodzina Markowa ma mocną własność Markowa względem filtracji \mathcal{F}_t , to dla dowolnego momentu zatrzymania τ , funkcji $\eta: \{\tau < \infty\} \rightarrow T \cup \{\infty\}$, \mathcal{F}_τ -mierzalnej oraz ograniczonej funkcji borelowskiej f ,

$$\mathbf{E}(f(X_{\tau+\eta})|\mathcal{F}_\tau) = P^\eta f(X_\tau) \text{ p.n.}$$

na zbiorze $\{\tau, \eta < \infty\}$.

5. Wykaż, że jeśli τ jest skończonym momentem zatrzymania względem filtracji $\mathcal{F}_{\leq t}^W$, to proces $(W_{t+\tau} - W_\tau)_{t \geq 0}$ jest procesem Wienera niezależnym od \mathcal{F}_τ .

Zadania z Procesów Stochastycznych 13

1. Załóżmy, że X_t jest rodziną Markowa na dwuelementowej przestrzeni stanów z macierzą przejścia

$$P^t = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 + 2e^{-7t} & 2 - 2e^{-7t} \\ 3 - 3e^{-7t} & 2 + 3e^{-7t} \end{pmatrix}.$$

Znajdź generator A półgrupy generowanej przez X_t .

2. Dany jest jednorodny w czasie proces Markowa na przestrzeni $\{-1, 1\}$ o operatorze infinytezymalnym

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Wyznacz $\mathbf{P}_1(X_4 = X_2)$.

3. Niech A będzie generatorem półgrupy związanej z procesem Wienera. Wykaż, że jeśli $f \in C_u^{(2)}(\mathbb{R})$ to $f \in D_A$ oraz $Af = \frac{1}{2}f''$.
4. Udowodnij, że dla d wymiarowego procesu Wienera $C_u^{(2)}(\mathbb{R}^d) \subset D_A$ i $Af = \frac{1}{2}\Delta f$ dla $f \in C_u^{(2)}(\mathbb{R}^d)$.
5. Niech $X_t = e^{-t}W_{e^{2t}}$. Wykaż, że X jest jednorodnym procesem Markowa i znajdź Af dla odpowiednio gładkiej funkcji f .
6. Niech $(X_t, \mathbf{P}_x)_{t \geq 0, x \in E}$ będzie jednorodnym procesem Markowa względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ z generatorem $(A, D(A))$. Załóżmy ponadto, że X_t jest prognozowalnie mierzalny. Wykaż, że dla $f \in D(A)$ proces

$$M_t^f := f(X_t) - \int_0^t Af(X_s)ds$$

jest martyngałem względem każdej miary \mathbf{P}_x .