Zadania z gwiazdką

1. Załóżmy, że X jest procesem startującym z zera, o przyrostach niezależnych i stacjonarnych, trajektoriach prawostronnie ciągłych, o wartościach całkowitych i skokach równych 1, Wykaż, że jeśli $\mathbf{P}(X_1 \neq 0) > 0$, to X jest procesem Poissona.

2. Załóżmy, że N jest procesem Poissona, zaś $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbf{P}(\Delta_1 \neq 0) = 1$. Wykaż, że jeśli zmienne Δ_i są niezależne od N, to proces N^Δ dany wzorem
$$N_t^\Delta := \sum_{i \leqslant N_t} \Delta_i$$
ma przyrosty niezależne i stacjonarne, startuje z zera i ma trajektorie prawostronnie ciągłe.

3. Załóżmy, że X jest procesem startującym z zera, o przyrostach niezależnych i stacjonarnych i trajektoriach ciągłych. Wykaż, że $X = at + bW$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, a W jest procesem Wienera.

4. Wykaż, że
a) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,1]}) \cap C[0,1] = \mathcal{B}(C[0,1])$.
b) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)}) \cap C[0,\infty) = \mathcal{B}(C[0,\infty))$, gdzie $\mathcal{B}(C[0,\infty))$ oznacza σ-ciało zbiorów borelowskich w $C[0,\infty)$ w topologii zbieżności niemal jednostajnej.

5. Wykaż, że
a) Proces Wienera nie jest lokalnie Hölderowski z wykładnikiem 1/2.
b) Istnieje $a < \infty$ takie, że
$$\sup_{0 \leqslant s < t \leqslant 1} \frac{|W_t - W_s|}{\sqrt{t-s}\,\ln^a(|t-s|^{-1})} < \infty. \text{ p.n.}$$

6. Niech $W = (W_t)_{t\in[0,1]}$ będzie procesem Wienera. Wykaż, że dla dowolnego funkcjonału $\varphi \in (C[0,1])^*$, $\varphi(W)$ ma rozkład normalny.

7. Wykaż, że dla $0 < \alpha < 1$, istnieje scentrowany proces gaussowski $(X_t)_{t\geqslant 0}$ taki, że $\mathbf{E}|X_t - X_s|^2 = |t-s|^{2\alpha}$.