Zadania z Procesów Stochastycznych II - 1

1. Niech $\pi_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{k_n}^{(n)}\}$, gdzie $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{k_n}^{(n)} = b$ będzie ciągiem podziałów odcinka $[a,b]$ oraz $\mathrm{diam}(\pi_n) = \max_k |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}|$ oznacza średnicę π_n. Udowodnij, że

$$S(\pi_n) := \sum_{k=1}^{k_n} |W_{t_k^{(n)}} - W_{t_{k-1}^{(n)}}|^2 \to b - a \text{ przy } n \to \infty \text{ w } L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}),$$

jeśli $\mathrm{diam}(\pi_n) \to 0$ oraz $S(\pi_n) \to b - a$ p.n., jeśli $\sum_n \mathrm{diam}(\pi_n) < \infty$.

2. Jeśli funkcja f jest ciągła na $[a,b]$ i ma wahanie ograniczone, to

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} |f(t_k^{(n)}) - f(t_{k-1}^{(n)})|^{1+\delta} = 0,$$

jeśli $\delta > 0$ oraz $\mathrm{diam}(\pi_n) \to 0$.

3. Udowodnij, że prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera mają nieskończone wahanie na każdym przedziale.

4** Wykaż, że jeśli M jest ciągłym martyngałem na $[0,T]$ takim, że $M_0 = 0$ p.n. to trajektorie M mają p.n. wahanie skończone na $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy gdy $M \equiv 0$. (Wskazówka rozpatrzeć najpierw przypadek gdy $\sup_t |M_t| \leqslant C$ oraz $\mathrm{Wah}_{[0,T]}(M) \leqslant C$ p.n. korzystając z tożsamości

$$M_t^2 = \sum_{k=1}^{n} |M_{kt/n} - M_{(k-1)t/n}|^2 + 2\sum_{k=1}^{n} M_{(k-1)t/n}(M_{(kt/n} - M_{(k-1)t/n}).)$$

5. Wykaż, że jeśli f ma wahanie skończone na $[a,b]$, to $f(t) = f(a) + f_1(t) - f_2(t)$, gdzie f_1 i f_2 są funkcjami niemalejącymi takimi, że $f_i(a) = 0$.

6. Niech $f \in C^1[a,b]$. Wykaż, że f ma wahanie ograniczone oraz $\int_a^b h(t)df(t) = \int_a^b h(t)f'(t)dt$ dla h ciagłych na $[a,b]$.

7* Niech π_n będzie ciągiem podziałów jak w zadaniu 1 takim, że $\mathrm{diam}(\pi_n) \to 0$. Wykaż, że jeśli dla dowolnej funkcji $g \in C[a,b]$ istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} g(t_k^{(n)})(f(t_k^{(n)}) - f(t_{k-1}^{(n)}))$$

i jest skończona, to f ma wahanie ograniczone na $[a,b]$.

8. Jaki rozkład ma zmienna $\int_0^T h(t)dW_t$ dla $h \in L^2[0,T]$?

9. Oblicz $\mathrm{Cov}(\int_0^T h_1(t)dW_t, \int_0^T h_2(t)dW_t)$ dla $h_1, h_2 \in L^2[0,T]$.

10. Niech $C_p := (\mathbf{E}|W_1|^p)^{1/p}$. Wykaż, że dla $0 < p < \infty$, przekształcenie $h \to C_p^{-1} \int_0^T h(t)dW_t$ jest izometrycznym włożeniem $L^2([0,T])$ w $L^p(\Omega)$.

11. Wykaż, że dla $0 < t < T$ i $h \in L^2([0,T])$ zachodzi

$$\int_0^t h(s)dW_s = \int_0^T hI_{[0,t]}(s)dW_s \text{ p.n.}$$

12. Wykaż, że dla $h \in C^1[0,T]$, $T < \infty$ zachodzi

$$\int_0^T h(t)dW_t = h(T)W_T - \int_0^T h^{'}(t)W_t dt \text{ p.n.}$$

13. Wykaż, że proces

$$Y_t = \begin{cases} (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}dW_s & 0 \leqslant t < 1 \\ 0 & t = 1 \end{cases}$$

ma takie same rozkłady skończenie wymiarowe co proces $Z_t = W_t - tW_1$ (most Browna).

14* Załóżmy, że $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem o przyrostach niezależnych takim, że $X_0 = 0$ i $X_t - X_s \sim \text{Cauchy}(t-s)$ dla $0 \leqslant t \leqslant s$. Przeprowadź konstrukcję analogiczną do całki Paleya-Wienera i zdefiniuj $\int_0^T h(t)dX_t$ dla $h \in L^1[0,T]$. (Uwaga: $\mathbf{E}|X_t| = \infty$ dla $t > 0$).

Zadania z Procesów Stochastycznych II - 2

1. Wykaż, że dla dowolnej funkcji ciągłej f o wahaniu skończonym na $[a, b]$ zachodzi $\int_a^b f(s)df(s) = \frac{1}{2}(f^2(b) - f^2(a))$.

2. Oblicz granice w $L^2(\Omega)$ przy $n \to \infty$
   a) $\sum_{k=0}^{n-1} W_{tk/n}(W_{t(k+1)/n} - W_{tk/n})$
   b) $\sum_{k=0}^{n-1} W_{t(k+1)/n}(W_{t(k+1)/n} - W_{tk/n})$.

3. Dla procesu stochastycznego $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ oraz momentu zatrzymania τ określamy $X^\tau = (X_t^\tau)_{t\in[0,T]}$ wzorem $X_t^\tau := X_{\tau\wedge t}$. Udowodnij, że
   i) Jeśli X ma trajektorie (prawostronnie)ciągłe, to X^τ też ma trajektorie (prawostronnie)ciągłe.
   ii) Jeśli X jest procesem adaptowalnym i prawostronnie ciągłym, to X^τ jest $\mathcal{F}_{\tau\wedge t} \subset \mathcal{F}_t$ adaptowalny.
   iii) Jeśli M jest prawostronnie ciągłym martyngałem, to M^τ jest martyngałem zarówno względem filtracji $\mathcal{F}_t$, jak i $\mathcal{F}_{\tau\wedge t}$.

4. Niech $(X_n)_{n=0}^\infty$ będzie ciągiem zmiennych $\mathcal{F}_n$ adaptowalnych. Wykaż, że istnieje dokładnie jeden rozkład $X_n = Y_n + Z_n$ taki, że $(Y_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem, zaś $Z_0 = 0$ oraz Z_n jest ciągiem prognozowalnym (tzn. $\mathcal{F}_{n-1}$ adaptowalnym). Ponadto X_n jest podmartyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg Y_n jest niemalejący. W szczególności, jeśli X_n jest martyngałem względem $\mathcal{F}_n$, to istnieje dokładnie jeden niemalejący ciąg Z_n zmiennych prognozowalnych taki, że $Z_0 = 0$ oraz $X_n^2 - Z_n$ jest martyngałem.

5. Wykaż, że każdy proces prognozowalny jest progresywnie mierzalny.

Zadania z Procesów Stochastycznych II - 3

1. Wykaż, że jeśli $X \in \mathcal{L}^2_T, 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T$ oraz ξ jest ograniczoną zmienną losową $\mathcal{F}_t$ mierzalną to $\xi X I_{(t,s]} \in \mathcal{L}^2_T$ oraz $\int_t^s \xi X dW = \xi \int_t^s X dW$ (Uwaga: $\int_t^s X dW$ definiujemy jako $\int_0^T I_{(s,t]} X dW$).

2. Wykaż, że jeśli $0 < t_1 < \ldots < t_m < T$ oraz ξ_k są zmiennymi losowymi w $L^2(\Omega)$, $\mathcal{F}_{t_k}$ mierzalnymi to proces $X := \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k I_{(t_k, t_{k+1}]}$ należy do $\mathcal{L}^2_T$ oraz $\int_0^t X dW = \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k (W_{t_{k+1} \wedge t} - W_{t_k \wedge t})$.

3. Załóżmy, że X jest procesem prognozowalnym, ciągłym w L^2 (tzn. $t \to X_t$ jest ciągła z $[0,T]$ w $L^2(\Omega)$). Wykaż, że wówczas $X \in \mathcal{L}^2_T$ oraz dla dowolnego ciągu podziałów $0 = t_0^{(n)} \leqslant t_1^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant t_{k_n}^{(n)} = T$ o średnicy zbiegającej do zera zachodzi dla $t \leqslant T$
$$\sum_{k=0}^{k_n - 1} X_{t_k^{(n)}} (W_{t_{k+1}^{(n)}} - W_{t_k^{(n)}}) \to \int_0^T X dW$$
w $L^2(\Omega)$ przy $n \to \infty$.

4. Oblicz $\int_0^t W_s dW_s$.

5. Niech τ będzie momentem zatrzymania takim, że $\mathbf{E}\tau < \infty$. Wykaż, że $I_{[0,\tau]} \in \mathcal{L}^2_\infty$ oraz $\int_0^\infty I_{[0,\tau]}(s) dW_s = W_\tau$. Wywnioskuj stąd, że $\mathbf{E}W_\tau = 0$ oraz $\mathbf{E}W_\tau^2 = \mathbf{E}\tau$.

6. Dla $a, b > 0$ określmy $\tau := \inf\{t : |W_t| = a\sqrt{b+t}\}$. Wykaż, że $\tau < \infty$ p.n. oraz $\mathbf{E}\tau < \infty$ wtedy i tylko wtedy gdy $a < 1$. Ponadto dla $a < 1$, $\mathbf{E}\tau = \frac{a^2 b}{1-a^2}$.

7. Niech ξ będzie zmienną losową o skończonej wariancji taką, że $\mathbf{E}\xi = 0$. Wykaż, że istnieje moment zatrzymania τ taki, że W_τ ma ten sam rozkład co ξ oraz $\mathbf{E}\tau = \mathbf{E}\xi^2$.

8. Niech $X \in \Lambda^2_T$, $0 \leqslant t < s \leqslant T$ oraz ξ będzie zmienną losową $\mathcal{F}_{t_1}$ mierzalną (niekoniecznie ograniczoną). Wykaż, że $\xi X I_{(t,s]} \in \Lambda^2_T$ oraz $\int_t^s \xi X dW = \xi \int_t^s X dW$.

9. Znajdź proces $X \in \Lambda^2_T$ taki, że $\int_0^t X_s dW_s$ nie jest martyngałem.

Zadania z Procesów Stochastycznych II - 4

1. Niech $I_t = I_M(X)_t = \int_0^t XdM$, gdzie $M \in \mathcal{M}^{2,c}$ oraz $X \in \mathcal{E}$. Wykaż, że I jest ciągłym martyngałem, $I_0 = 0$ oraz $\mathbf{E}|I_T|^2 = \mathbf{E}\int_0^T X_s^2 d\langle M\rangle_s$.

2. Wykaż, że $\langle M^\tau\rangle = \langle M\rangle^\tau$ dla $M \in \mathcal{M}^{2,c}$ i dowolnego momentu zatrzymania τ.

3. Wykaż, że dla $M, N \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$ oraz dowolnego momentu zatrzymania τ zachodzi $\langle M^\tau, N^\tau\rangle = \langle M^\tau, N\rangle = \langle M, N^\tau\rangle = \langle M, N\rangle^\tau$.

4. Niech h będzie dowolną funkcją o wahaniu ograniczonym na przedziale $[a,b]$, zaś f, g funkcjami ciągłymi na $[a,b]$. Określmy $G(s) = \int_a^s g(t)dh(t)$ dla $a \leqslant t \leqslant b$. Wykaż, że G ma wahanie ograniczone oraz $\int_a^b f(s)dG(s) = \int_a^b f(s)g(s)dh(s)$.

5. Niech $M_t = \int_0^t W_t^3 dW_t$. Jak wyglądają przestrzenie $\mathcal{L}^2_\infty(M)$ i $\Lambda^2_\infty(M)$? Niech $X_t := \int_0^t \frac{1}{W_t}dM_t$. Uzasadnij, że proces X jest dobrze określony. Oblicz wartość oczekiwaną i funkcję kowariancji X.

6. Niech $\mathcal{A}$ będzie pewną klasą procesów adaptowalnych na $[0,T)$ taką, że jeśli $X \in \mathcal{A}$ to $X^\tau \in \mathcal{A}$ dla dowolnego momentu zatrzymania τ. Przez $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ oznaczamy wówczas klasę tych procesów adaptowalnych na $[0,T)$ dla których istnieje rosnący ciąg momentów zatrzymania τ_n taki, że $\tau_n \to T$ oraz $X^{\tau_n} \in \mathcal{A}$ dla wszystkich n.
a) Wykaż, że jeśli $X \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ to $X^\tau \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ dla dowolnego momentu zatrzymania τ
b) Wykaż, że $(\mathcal{A}_{\mathrm{loc}})_{\mathrm{loc}} = \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$
c) Wykaż, że jeśli $\mathcal{A}$ jest liniowa to $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ też jest liniowa.

7. Wykaż, że $\mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}} = \mathcal{M}^{2,c}_{\mathrm{loc}}$.

8. a) Wykaż, że każdy ograniczony ciągły martyngał lokalny jest martyngałem.
b) Wykaż, że każdy nieujemny całkowalny ciągły martyngał lokalny jest nadmartyngałem.
c) Podaj przykład nieujemnego całkowalnego ciągłego martyngału lokalnego, który nie jest martyngałem.

9. Niech $M, N \in \mathcal{M}^{2,c}_{\mathrm{loc}}$ oraz $X \in \Lambda^2_T(M) \cap \Lambda^2_T(N)$. Udowodnij, że $X \in \Lambda^2_T(M+N)$ oraz $\int Xd(M+N) = \int XdM + \int XdN$.

10. Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{\mathrm{loc}}$ oraz $X \in \Lambda^2_T(M)$. Wykaż, że dla dowolnego momentu zatrzymania τ zachodzi
$$(\int XdM)^\tau = \int XdM^\tau = \int XI_{[0,\tau]}dM = \int XI_{[0,\tau]}dM^\tau.$$
W szczególności jeśli procesy X i Y pokrywają się na przedziale $[0,\tau]$, to $(\int XdM)^\tau = (\int YdM)^\tau$.

Zadania z Procesów Stochastycznych II - 5

1. Korzystając ze wzoru na całkowanie przez części przedstaw $\int W_s^2 dW_s$ jako wyrażenie nie zawierające całek stochastycznych.

2. Oblicz $\langle W^1, W^2 \rangle$, gdzie W^1, W^2 niezależne procesy Wienera.

3. Niech X będzie martyngałem lokalnym takim, że $|X_t| \leqslant Y$ dla wszystkich t oraz $\mathbf{E}Y < \infty$. Wykaż, że X jest martyngałem.

4. Niech f będzie funkcją klasy C^2 na $\mathbb{R}^2$, korzystając z wzoru Ito oblicz $df(t, W_t)$.

5. Niech $Z_t = \exp(\lambda W_t - \lambda^2 t/2)$. Wykaż, że $dZ_t = \lambda Z_t dW_t$ tzn. $Z_t = 1 + \lambda \int_0^t Z_s dW_s$.

6. Niech $\sigma = (\sigma_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant d}$ będzie macierzą procesów z Λ^2. Określamy wówczas $\int \sigma dW$ jako m wymiarowy proces $(\sum_{j=1}^d \sigma_{1j} dW_j, \ldots, \sum_{j=1}^d \sigma_{mj} dW_j)$. Niech $Z = (Z_1, \ldots, Z_m) = \int \sigma dW + \int b dt$, gdzie $b = (b_1(t), \ldots, b_m(t))$ proces m wymiarowy ciągły, adaptowalny. Dla $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ klasy C^2 oblicz korzystając z wzoru Ito $df(Z)$.

Zadania z Procesów Stochastycznych II - 6

1. Niech $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^2, G zbiorem otwartym ograniczonym w $\mathbb{R}^d$ oraz $x \in G$. Określmy $\tau := \inf\{t\colon W_t + x \notin G\}$. Korzystając ze wzoru Ito wykaż, że jeśli g jest harmoniczna w G to $h(W_t^\tau + x)$ jest martyngałem. Pokaż, że wystarczy zakładać, iż g jest C^2 w pewnym otoczeniu domknięcia G.

2. Wykaż, że dla 3-wymiarowego ruchu Browna W_t i $a \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$ proces $X_t = |W_t - a|^{-1}$ jest martyngałem lokalnym, ale nie jest martyngałem. Ponadto X_t jest nadmartyngałem oraz zbiega do 0 w L^1 i prawie na pewno.

3. Wykaż, że 2-wymiarowego ruchu Browna W_t i $a \in \mathbb{R}^2, a \neq 0$ proces $X_t = \ln |W_t - a|$ jest martyngałem lokalnym. Wywnioskuj stąd, że z prawdopodobieństwem 1 proces W_t omija punkt a, ale trajektoria procesu jest dowolnie bliska punktu a.

4. Wykaż, że d-wymiarowy proces X startujący z zera o trajektoriach ciągłych jest procesem Wienera względem filtracji $\mathcal{F}_s$ wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $u \in \mathbb{R}^d$ oraz $s < t$ zachodzi $\mathbf{E}(\exp(i\langle u, X_t - X_s\rangle)|\mathcal{F}_s) = \exp(-(t-s)\|u\|^2/2)$ p.n..

5. Załóżmy, że $M_1, M_2, \ldots, M_d$ są ciągłymi martyngałami lokalnymi startującymi z zera takimi, że $\langle M_j, M_k\rangle = \delta_{j,k}t$. Wykaż, że $M = (M_1, M_2, \ldots, M_d)$ jest d-wymiarowym procesem Wienera.

6. Wykaż, że d-wymiarowy proces X startujący z zera o trajektoriach ciągłych jest procesem Wienera wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}^d$ proces $\exp(\langle \lambda, X_t\rangle - \|\lambda\|^2 t/2)$ jest martyngałem lokalnym.

7* Niech $T < \infty$ oraz $X = (X_t)_{0 \leqslant t < T}$ będzie procesem prognozowalnym takim, że dla pewnej liczby całkowitej $m \geqslant 1$ zachodzi

$$\mathbf{E}\int_0^T X^{2m}(s)ds < \infty.$$

Wykaż, że $X \in \mathcal{L}_T^2$ oraz $M = \int XdW$ jest martyngałem takim, że

$$\mathbf{E}M_T^{2m} \leqslant (m(2m-1))^m T^{m-1}\mathbf{E}\int_0^T X_s^{2m}ds$$

(Wsk. Wzór Ito i nierówność Höldera)

8. Niech $W = (W^1, \ldots, W^d)$ będzie d-wymiarowym ruchem Browna, a $R_t = \|W_t\|$. Wykaż, że
a) $B_t := \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{W_s^{(i)}}{R_s} dW_s^i$ jest jednowymiarowym procesem Wienera;
b) $R_t = \int_0^t \frac{d-1}{2R_s} ds + B_t$ (R_t jest nazywane procesem Bessela.)

Zadania z Procesów Stochastycznych II - 7

1. Wykaż, że dla $a > 0$ proces $X_t = \xi e^{bt} + \sqrt{a}\int_0^t e^{b(t-s)}dW_s$ jest jedynym rozwiązaniem równania $dX_t = bX_t dt + \sqrt{a}dW_t$ z warunkiem początkowym $X_0 = \xi$. Jeśli $b < 0$ oraz ξ ma rozkład $\mathcal{N}(0, \frac{-a}{2b})$ to X_t jest procesem stacjonarnym (proces Ornsteina-Uhlenbecka)

2. Załóżmy, że $A(t)$ jest ciągłą funkcją na $[0,T]$ o wartościach w macierzach $m \times m$, $\sigma(t)$ jest ciągłą funkcją na $[0,T]$ o wartościach w macierzach $m \times d$ zaś $a(t)$ jest ciągłą funkcją na $[0,T]$ o wartościach w $\mathbb{R}^m$. Niech $S(t)$ będzie jedynym rozwiązaniem równania
$$\frac{dS(t)}{dt} = A(t)S(t); \quad S(0) = I.$$
Ponadto niech W będzie d-wymiarowym procesem Wienera, a ξ zmienną losową niezależną od W. Wykaż, że

a)
$$\xi(t) := S(t)(\xi + \int_0^t S^{-1}(s)a(s)ds)$$
jest rozwiązaniem równania deterministycznego
$$\frac{d\xi(t)}{dt} = A(t)\xi(t) + a(t); \quad \xi(0) = \xi,$$
b)
$$X(t) = S(t)(\xi + \int_0^t S^{-1}(s)a(s)ds + \int_0^t S^{-1}(s)\sigma(s)dW_s)$$
jest jedynym rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego
$$dX_t = (A(t)X_t + a(t))dt + \sigma(t)dW_t; \quad X_0 = \xi.$$

3. Niech σ będzie funkcją ciągłą na $\mathbb{R}^d$ o wartościach w macierzach $d \times d$, a $b(x)$ funkcją ciągłą z $\mathbb{R}^d$ w $\mathbb{R}^d$, ponadto niech $a = \sigma\sigma^T$. Niech
$$Lf(x) = \sum_{j=1}^d b_j(x)\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$
oraz D będzie otwartym pozdbiorem $\mathbb{R}^d$. Rozpatrzmy równanie
$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x.$$
Dla $x \in D$ oraz procesu X_t będącego rozwiązaniem powyższego równania określmy
$$\tau := \inf\{t \geqslant 0 \colon X_t \notin D\}.$$
Wykaż, że jeśli istnieje funkcja f klasy C^2 określona na pewnym otoczeniu domknięcia D oraz $c > 0$ takie, że $f \geqslant 0$ na D oraz $Lf \leqslant -c$ na D to $\mathbf{E}\tau < \infty$.

4. Przy założeniach i oznaczeniach z zadania 2 załóżmy, że D jest pozbiorem pasa $\{y\colon |y_1| \leqslant R\}$, b_1 jest funkcją ograniczoną na D oraz $a_{1,1}(y) \geqslant \alpha > 0$. Wykaż, że $\mathbf{E}\tau < \infty$. (Wsk. Rozpatrzyć funkcję $f(x) = \cosh rR - \cosh rx_1$.

5. Niech D będzie wnętrzem kąta w $\mathbb{R}^2$ o rozwartości α, $X_t = W_t + x$ dla pewnego $x \in D$, a τ oznacza pierwszy moment wyjścia przez X z D. Udowodnij, że
a) Jeśli $\alpha < \pi/2$ to $\mathbf{E}\tau < \infty$,
b) jeśli $\alpha \geqslant \pi/2$ to $\mathbf{E}\tau = \infty$.
Wsk. a) rozpatrzyć funkcję $f(r, \varphi) = r^2 \sin(\rho(\alpha + \varepsilon - \varphi))$ we wsp. biegunowych, b) Przyjąć $\alpha = \pi/2$ i obliczyć ogon τ z zasady odbicia.

6. Przy oznaczeniach i założeniach zadania 2 załóżmy dodatkowo, że D jest obszarem ograniczonym oraz $X_t = X_t^x$ i $\tau = \tau_x$. Niech g będzie funkcją ciągłą w D, a h ciągłą na ∂D oraz $v(x)$ będzie rozwiązaniem równania
$$\begin{cases} Lv(x) = g(x) & x \in D \\ v(x) = h(x) & x \in \partial D \end{cases}.$$
Załóżmy, że v przedłuża się do funkcji klasy C^2 na otoczeniu domknięcia zbioru D. Wykaż, że
$$v(x) = \mathbf{E}h(X_{\tau_x}^x) - \int_0^{\tau_x} g(X_s^x)ds.$$

7. Załóżmy, że $d = 1$, $D = (\alpha, \beta)$ oraz $a(x) = \sigma^2(x) > \delta > 0$ dla $x \in (\alpha, \beta)$. Oblicz $\mathbf{P}(X_{\tau_x}^x = \alpha)$ dla $x \in (\alpha, \beta)$.

8* Niech M będzie ciągłym martyngałem lokalnym takim, że $\lim_{t\to\infty}\langle M, \rangle_t = \infty$ p.n. Dla $0 \leqslant t < \infty$ definiujemy czasy zatrzymania $\tau(t)$ wzorem
$$\tau(t) := \inf\{s \geqslant 0\colon \langle M\rangle_s > t\}.$$
Wykaż, że proces $B_t := M_{\tau(t)}$ jest jednowymiarowym procesem Wienera.

9* Załóżmy, że M jest ciągłym martyngałem lokalnym na $[0, T)$. Wykaż, że
a) na zbiorze $\{\langle M\rangle_T < \infty\}$ istnieje p.n. skończona granica $\lim_{t\to T-} M_t$
b) na zbiorze $\{\langle M\rangle_T = \infty\}$ p.n. zachodzi $\limsup_{t\to T-} M_t = \infty$ oraz $\liminf_{t\to T-} M_t = -\infty$.

Zadania z Procesów Stochastycznych II - 8

1. Znajdź taką miarę probabilistyczną $\mathbb{Q}$ na $(\Omega, \mathcal{F}^W_{\leqslant 1})$, by proces $(W_t+2t^4)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ był procesem Wienera względem $\mathbb{Q}$.

2. Niech $Z = Z_0 + A + M, Y = Y_0 + B + N$ będą ciągłymi semimartyngałami. Definiujemy całkę Stratonowicza wzorem

$$\int_0^t Y_s \circ dZ_s := \int_0^t Y_s dZ_s + \frac{1}{2}\langle M, N\rangle.$$

Pokazać, że jeśli f jest funkcją klasy C^3 na $\mathbb{R}$ to

$$f(Z_t) = f(Z_0) + \int_0^t f'(Z_s) \circ dZ_s.$$

3. Pokazać, że przy oznaczeniach poprzedniego zadania oraz dowolnym ciągu $\pi_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{k_n}^{(n)}\}$ podziałów odcinka $[0,t]$ takim, że $\mathrm{diam}(\pi_n) \to 0$ zachodzi

$$\sum_{j=1}^{k_n} \frac{Y_{t_{j+1}^{(n)}} + Y_{t_j^{(n)}}}{2}(Z_{t_{j+1}^{(n)}} - Z_{t_j^{(n)}}) \to \int_0^t Y_s \circ dZ_s$$

przy $n \to \infty$ według prawdopodobieństwa.

4. Niech μ oznacza miarę Wienera na $C([0,1])$ (tzn. rozkład wyznaczony przez proces Wienera na $[0,1]$). Dla $h \in C([0,1])$ określamy nową miarę μ_h wzorem $\mu_h(A) := \mu(h + A)$.
a) Wykaż, że jeśli $h(t) = \int_0^t g(s)ds$ dla $0 \leqslant t \leqslant 1$ oraz $g \in L^2[0,1]$ to miara μ_h jest absolutnie ciągła względem μ oraz znaleźć gęstość.
b*) Jeśli h nie ma powyższej postaci to μ i μ_h są wzajemnie singularne.

Zadania z Procesów Stochastycznych II - 9

1. DLa $T < \infty$ rozpatrzmy równanie
$$dX_t = b(t, X_t)dt + dW_t, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad X_0 = 0. \tag{1}$$
Niech U będzie procesem Wienera na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $Z_t = \exp(\int_0^t b(s, U_s)dU_s - \int_0^t b^2(s, U_s)ds/2)$, $W_t := U_t - \int_0^t b(s, U_s)ds$. Stosując twierdzenie Girsanowa wykaż, że jeśli $\mathbf{E}Z_T = 1$ to istnieje miara probabilistyczna $\mathbf{Q}_T$ taka, że para (U, W) jest słabym rozwiązaniem (1) na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Q}_T)$ (z $X = U$).

2. a) Załóżmy, że $f_n \in C^2(\mathbb{R})$ spełniają warunki $f_n(0) = f_n'(0) = 0$, $0 \leqslant f_n'' \leqslant n$, f_n"$(x) = n$ dla $|x| \leqslant n^{-2}(n-1)$ oraz f_n"$(x) = 0$ dla $|x| \geqslant n^{-2}(n+1)$. Niech
$$Y_t^{(n)} := \frac{1}{2}\int_0^t f_n''(W_s)dW_s.$$
Wykaż, że jeśli α jest odpowiednio duże, to $Y_t^{(k^\alpha)} \to L_t$ p.n. przy $k \to \infty$ oraz zbieżność jest jednostajna na każdym przedziale ograniczonym.
b) Wywnioskuj stąd, że
$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}k^\alpha |\{s \in [0,t] \colon |W_s| \leqslant k^{-\alpha}\}| = L_t \quad \text{p.n..}$$
c) Wykaż, że
$$L_t = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{2\varepsilon}|\{s \in [0,t] \colon |W_s| \leqslant \varepsilon\}| \quad \text{p.n..}$$
i zbieżność jest jednostajna na przedziałach ograniczonych.

3. Wykaż, że dla $a \in \mathbb{R}$ istnieje proces L_t^a ciągły, niemalejący, nieujemny taki, że
$$|W_t - a| = |a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(W_t - a)dW_t + L_t^a \quad \text{p.n..}$$
Ponadto
$$L_t^a = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{2\varepsilon}|\{s \in [0,t] \colon |W_s - a| \leqslant \varepsilon\}| \quad \text{p.n..}$$

4. Udowodnij, że
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}L_t^a &= (W_t - a)^+ - a^- - \int_0^t I_{[a,\infty)}(W_s)dW_s \\ &= (W_t - a)^- - a^+ + \int_0^t I_{(-\infty,a]}(W_s)dW_s \quad \text{p.n..}\end{aligned}$$

5* Wykaż, że da się wybrać taką wersję czasów lokalnych L_t^a, by proces $(t, a) \to L_t^a$ był ciągły względem pary parametrów $(a, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

Zadania z Procesów Stochastycznych II - 10

1. Wykaż, że d-wymiarowy proces $X=(X^{(1)},\ldots,X^{(d)})$ jest procesem Wienera względem ustalonej filtracji $\mathcal{F}_t$ wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej funkcji $f\in C^2(\mathbb{R}^d)$ proces $(X_t-\frac{1}{2}\int_0^t \triangle f(X_s)ds,\mathcal{F}_t)$ jest martyngałem lokalnym.

2. Niech $M=(M^{(1)},\ldots,M^{(d)})$ będzie taki, że $M_0=0$, $M^{(i)}\in\mathcal{M}^c_{\mathrm{loc}}$ oraz dla $1\leqslant i,j\leqslant d$,
$$\langle M^{(i)},M^{(j)}\rangle_t=\int_0^t z_s^{(i,j)}ds.$$
i) Wykaż, że macierz $Z_s=(z_s^{(i,j)})_{i,j\leqslant d}$ jest symetryczna i nieujemnie określona. Wywnisokuj stąd, że istnieje macierz procesów $Q_s=(q_s^{(i,j)})_{i,j\leqslant d}$ taka, że $Q_s^{-1}=Q_s^T$ oraz $\Lambda_s=Q_s^{-1}Z_sQ_s$ jest macierzą diagonalną. Niech $Q_s=\mathrm{diag}(\lambda_s^{(1)},\ldots,\lambda_s^{(d)})$.
ii) Zdefiniujmy $N_t^{(i)}:=\sum_{k=1}^d\int_0^t q_s^{(i,k)}dM_s^{(k)}$. Wykaż, że
$$\langle N^{(i)},N^{(j)}\rangle_t=\delta_{i,j}\int_0^t\lambda_s^{(i)}ds.$$
iii) Niech $B=(B^{(1)},\ldots,B^{(d)})$ będzie d-wymiarowym procesem Wienera niezależnym od N. Określmy
$$W_t^{(i)}:=\int_0^t I_{\{\lambda_s^{(i)}>0\}}\frac{1}{\sqrt{\lambda_s^{(i)}}}dN_s^{(i)}+\int_0^t I_{\{\lambda_s^{(i)}=0\}}dB_s^{(i)}.$$
Wykaż, że W jest procesem Wienera oraz $N_t^{(i)}=\int_0^t\sqrt{\lambda_s^{(i)}}dW_s^{(i)}$.
iv) Określmy $X_t^{(i,j)}:=q_s^{(i,j)}\lambda_s^{(j)}$, udowodnij, że
$$M_t^{(i)}=\sum_{j=0}^d\int_0^t X_s^{(i,j)}dW_s.$$