Kolokwium ze Wstępu do Analizy Stochastycznej
grupa I 17 grudnia 2011

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** *i pełne rozwiązanie każdego z nich napisać na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu i numerem grupy (grupa I). Za każde zadanie można dostać 10 punktów.*

1. Znajdź funkcję $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ taką, że $(\int_0^{f(t)} u^2 dW_u)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera.

2. Proces $(X_t)_{t\in[0,3]}$ jest gaussowski i ma niezależne przyrosty. Ponadto $\mathbb{E}X_t = 0$ oraz $\mathrm{Var}(X_t) = \sqrt{t^2+4}$.
   a) Znajdź rozkład zmiennej $X_t - X_s$ dla $0 \leqslant s < t$.
   b) Wykaż, że proces X ma ciągłą modyfikację. Co można powiedzieć o hölderowskości trajektorii tej modyfikacji?

3. Niech $M_t = \int_0^t e^{2W_s} dW_s$ dla $t \geqslant 0$. Oblicz $\mathbb{E}(M_t)$, $\mathrm{Var}(M_t)$ oraz $\mathrm{Cov}(M_t, M_s)$ dla $0 \leqslant s \leqslant t$.

4. Niech
   $$\tau_a = \inf\{t > 0\colon W_t + at = 5\}.$$
   a) Wykaż,że $\mathbb{P}(\tau_a < \infty) = 1$ dla $a \geqslant 0$.
   b) Oblicz $\mathbb{E}\tau_a$ dla $a \geqslant 0$.

5. Martyngał $(M_t)_{t\geqslant 0}$ ma trajektorie ciągłe i spełnia warunek
   $$\sup_{t\geqslant 0} \mathbb{E}|M_t| \ln^3(e + |M_t|) < \infty.$$
   Wykaż, że M_t jest zbieżny prawie na pewno i w L_1 przy $t \to \infty$.

6. Znajdź wszystkie funkcje f i g takie, że $(2W_t^3 - W_t^2 + f(t)W_t + g(t))_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez W.

Kolokwium ze Wstępu do Analizy Stochastycznej
grupa II 17 grudnia 2011

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** *i pełne rozwiązanie każdego z nich napisać na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu i numerem grupy (grupa II). Za każde zadanie można dostać 10 punktów.*

1. Znajdź funkcję $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ taką, że $(\int_0^{f(t)} \sqrt{u} dW_u)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera.

2. Proces $(X_t)_{t\in[0,2]}$ jest gaussowski i ma niezależne przyrosty. Ponadto $\mathbb{E}X_t = 0$ oraz $\mathrm{Var}(X_t) = \sqrt{2t^2+1}$.
   a) Znajdź rozkład zmiennej $X_t - X_s$ dla $0 \leqslant s < t$.
   b) Wykaż, że proces X ma ciągłą modyfikację. Co można powiedzieć o hölderowskości trajektorii tej modyfikacji?

3. Niech $M_t = \int_0^t e^{-3W_s} dW_s$ dla $t \geqslant 0$. Oblicz $\mathbb{E}(M_t)$, $\mathrm{Var}(M_t)$ oraz $\mathrm{Cov}(M_t, M_s)$ dla $0 \leqslant s \leqslant t$.

4. Niech
$$\tau_a = \inf\{t > 0\colon W_t + at = 2\}.$$
   a) Wykaż,że $\mathbb{P}(\tau_a < \infty) = 1$ dla $a \geqslant 0$.
   b) Oblicz $\mathbb{E}\tau_a$ dla $a \geqslant 0$.

5. Martyngał $(M_t)_{t\geqslant 0}$ ma trajektorie ciągłe i spełnia warunek
$$\sup_{t\geqslant 0} \mathbb{E}|M_t| \ln^2(e + |M_t|) < \infty.$$
   Wykaż, że M_t jest zbieżny prawie na pewno i w L_1 przy $t \to \infty$.

6. Znajdź wszystkie funkcje f i g takie, że $(W_t^3 + 2W_t^2 + f(t)W_t + g(t))_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez W.