Kartkówka 3

gr.I, 22 kwietnia 2002

1. Niech $(N_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Poissona z parametrem 4, zaś $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s : s \leqslant t)$. Znajdź funkcję f taką, że $(e^{2N_t - f(t)}, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem.

2. Załóżmy, że $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem o ciągłych trajektoriach takim, że $X_0 = 0$, $\limsup_{t\to\infty} |X_t| = \infty$ p.n. oraz $(X_t^3, \mathcal{F}^X_{\leqslant t})$ jest martyngałem. Określmy
$$\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : X_t = a\} \text{ dla } a \in \mathbb{R}.$$
a) Wykaż, że dla $a, b > 0$ zachodzi $\mathbf{P}(\tau_a < \tau_{-b}) = \frac{b^3}{a^3+b^3}$.
b)* Wybierzmy $a \neq 0$, czy proces $(X^3_{\tau_a \wedge t})_{t\geqslant 0}$ jest zbieżny prawie na pewno dla $t \to \infty$? Czy jest zbieżny w L^1?

Kartkówka 3

gr.II, 22 kwietnia 2002

1. Załóżmy, że $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem o ciągłych trajektoriach takim, że $X_0 = 0$, $\limsup_{t\to\infty} |X_t| = \infty$ p.n. oraz $(X_t^5, \mathcal{F}^X_{\leqslant t})$ jest martyngałem. Określmy
$$\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : X_t = a\} \text{ dla } a \in \mathbb{R}.$$
a) Wykaż, że dla $a, b > 0$ zachodzi $\mathbf{P}(\tau_a < \tau_{-b}) = \frac{b^5}{a^5+b^5}$.
b)* Wybierzmy $a \neq 0$, czy proces $(X^5_{\tau_a \wedge t})_{t\geqslant 0}$ jest zbieżny prawie na pewno dla $t \to \infty$? Czy jest zbieżny w L^1?

2. Niech $(N_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Poissona z parametrem 2, zaś $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s : s \leqslant t)$. Znajdź funkcję f taką, że $(e^{f(t) - N_t}, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem.