Kartkówka 4

gr.1, 24 maja 2010

1. Znajdź funkcje b i σ takie, że proces $X_s = \operatorname{arctg}(3W_t - t)$ spełnia równanie
$$dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt.$$

2. Znajdź taki ciągły proces A o wahaniu ograniczonym na każdym przedziale skończonym, żeby $(\sin(2W_t) - A_t)_{t\geqslant 0}$ był martyngałem oraz $A_0 = 0$. Czy proces A jest wyznaczony jednoznacznie?

3* Załóżmy, że $X \in \Lambda^2_\infty$ jest taki, że $\mathbb{E}\int_0^\infty X_s^2 ds = \infty$. Wykaż, że
$$\mathbb{E}\sup_t \Big(\int_0^t X_s dW_s\Big)^2 = \infty.$$

Kartkówka 4

gr.2, 24 maja 2010

1. Znajdź taki ciągły proces A o wahaniu ograniczonym na każdym przedziale skończonym, żeby $(\cos(3W_t) - A_t)_{t\geqslant 0}$ był martyngałem oraz $A_0 = 0$. Czy proces A jest wyznaczony jednoznacznie?

2. Znajdź funkcje b i σ takie, że proces $X_s = \operatorname{arctg}(2W_t + 3t)$ spełnia równanie
$$dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt.$$

3* Załóżmy, że $X \in \Lambda^2_\infty$ jest taki, że $\mathbb{E}\int_0^\infty X_s^2 ds = \infty$. Wykaż, że
$$\mathbb{E}\sup_t \Big(\int_0^t X_s dW_s\Big)^2 = \infty.$$

Kartkówka 4

gr.1, 25 maja 2010

1. Proces X spełnia równanie stochastyczne

$$dX_t = \frac{1}{\sqrt{1+X_t^2}} dW_t^1 + \frac{X_t}{\sqrt{1+X_t^2}} dW_t^2, \quad X_0 = 0,$$

   Wykaż, że X_t jest procesem Wienera.

2. Proces X spełnia równanie stochastyczne

$$dX_t = \cos(X_t)dt + \sin(X_t)dW_t.$$

   Znajdź równanie stochastyczne spełnione przez proces $\exp(3X_t + 2t)$.

3* Załóżmy, że funkcje $b, \sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są lipschitzowskie na każdym przedziale skończonym. Wykaż, że równanie $X_0 = 0$, $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$ ma conajwyżej jedno rozwiązanie.

Kartkówka 4

gr.2, 25 maja 2010

1. Proces X spełnia równanie stochastyczne

$$dX_t = \sin(X_t)dt + \cos(X_t)dW_t.$$

   Znajdź równanie stochastyczne spełnione przez proces $\exp(2X_t - 3t)$.

2. Proces X spełnia równanie stochastyczne

$$dX_t = \frac{X_t}{\sqrt{1+X_t^2}} dW_t^1 + \frac{1}{\sqrt{1+X_t^2}} dW_t^2, \quad X_0 = 0,$$

   Wykaż, że X_t jest procesem Wienera.

3* Załóżmy, że funkcje $b, \sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są lipschitzowskie na każdym przedziale skończonym. Wykaż, że równanie $X_0 = 0$, $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$ ma conajwyżej jedno rozwiązanie.