Kartkówka 4
gr.I, 12 maja 2003

1. a) Niech (W_t) będzie procesem Wienera startującym z zera. Czy proces $(e^{-5t}W_{2t})_{t\geqslant 0}$ jest procesem Markowa? Jeśli tak to wyznacz funkcję przejścia.
   b)* Załóżmy, że X_t jest procesem Markowa z funkcją przejścia P_t taką, że dla $\Gamma\subset\mathbb{R}$ symetrycznych (tzn. $-\Gamma=\Gamma$), $P_t(x,\Gamma)=P_t(-x,\Gamma)$ dla wszystkich x. Wykaż, że wówczas $|X_t|$ też jest procesem Markowa.

2. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste a, b takie, że na dwuelementowej przestrzeni stanów istnieje jednorodna rodzina Markowa z macierzami przejścia
$$P^t=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4+ae^{-3t} & 3+be^{-3t}\\ 4-4e^{-3t} & 3+4e^{-3t}\end{pmatrix}.$$

Kartkówka 4
gr.II, 12 maja 2003

1. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste a, b takie, że na dwuelementowej przestrzeni stanów istnieje jednorodna rodzina Markowa z macierzami przejścia
$$P^t=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3+ae^{-2t} & 4+be^{-2t}\\ 3-3e^{-2t} & 4+3e^{-2t}\end{pmatrix}.$$

2. a) Niech (W_t) będzie procesem Wienera startującym z zera. Czy proces $(e^{2t}W_{5t})_{t\geqslant 0}$ jest procesem Markowa? Jeśli tak to wyznacz funkcję przejścia.
   b)* Załóżmy, że X_t jest procesem Markowa z funkcją przejścia P_t taką, że dla $\Gamma\subset\mathbb{R}$ symetrycznych (tzn. $-\Gamma=\Gamma$), $P_t(x,\Gamma)=P_t(-x,\Gamma)$ dla wszystkich x. Wykaż, że wówczas $|X_t|$ też jest procesem Markowa.

Kartkówka 4

gr.I, 13 maja 2003

1. Niech (W_t) będzie procesem Wienera startującym z zera.
   a) Czy proces $(\sqrt{t}W_{t/2})_{t\geqslant 0}$ jest procesem Markowa? Jeśli tak to wyznacz funkcję przejścia.
   b)* Czy proces W_t^2 jest procesem Markowa? Odpowiedź uzasadnij.

2. Załóżmy, że Q jest stochastyczną macierzą $n \times n$, a N_t procesem Poissona z parametrem 2. Wykaż, że istnieje rodzina Markowa na n elementowej przestrzeni stanów z macierzami przejścia

$$P^t := \mathbf{E}Q^{N_t} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k \mathbf{P}(N_t = k).$$

Kartkówka 4

gr.II, 13 maja 2003

1. Załóżmy, że Q jest stochastyczną macierzą $n \times n$, a N_t procesem Poissona z parametrem 1. Wykaż, że istnieje rodzina Markowa na n elementowej przestrzeni stanów z macierzami przejścia

$$P^t := \mathbf{E}Q^{2N_t} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^{2k} \mathbf{P}(N_t = k).$$

2. Niech (W_t) będzie procesem Wienera startującym z zera.
   a) Czy proces $(\frac{1}{\sqrt{1+t}}W_{3t})_{t\geqslant 0}$ jest procesem Markowa? Jeśli tak to wyznacz funkcję przejścia.
   b)* Czy proces W_t^2 jest procesem Markowa? Odpowiedź uzasadnij.