**Kartkówka 3**
gr.1, 13 maja 2014

1. Wykaż, że ciąg $X_n = \sum_{k=1}^{5n} \left(W_{k/n} - W_{(k-1)/n}\right) \int_{(k-1)/n}^{k/n} W_t^2 dW_t$ jest zbieżny w $L^1$ i znajdź jego granicę.
2. Określmy $M_t = \int_0^t \sqrt{W_s^2 + 2} dW_s$ oraz $N_t = \int_0^t W_s dM_s$. Wykaż, że $M_t$ i $N_t$ są ciągłymi martyngałami. Oblicz $\mathbb{E} M_t^2$.

3* Załóżmy, że $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem adaptowalnym o ciągłych trajektoriach oraz zachodzi $\mathbb{E}\sup_{t>0}(\int_0^t X_s dW_s)^2 < \infty$. Wykaż, że $\mathbb{E}\int_0^\infty X_s^2 ds < \infty$.

**Kartkówka 3**
gr.2, 13 maja 2014

1. Określmy $M_t = \int_0^t \sqrt{2W_s^2 + 1} dW_s$ oraz $N_t = \int_0^t W_s dM_s$. Wykaż, że $M_t$ i $N_t$ są ciągłymi martyngałami. Oblicz $\mathbb{E} M_t^2$.
2. Wykaż, że ciąg $X_n = \sum_{k=1}^{3n} \left(W_{k/n} - W_{(k-1)/n}\right) \int_{(k-1)/n}^{k/n} W_t dW_t$ jest zbieżny w $L^1$ i znajdź jego granicę.

3* Załóżmy, że $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem adaptowalnym o ciągłych trajektoriach oraz zachodzi $\mathbb{E}\sup_{t>0}(\int_0^t X_s dW_s)^2 < \infty$. Wykaż, że $\mathbb{E}\int_0^\infty X_s^2 ds < \infty$.