

Kartkówka 3

gr.1, 9 stycznia 2012

1. Niech $M_t = W_t^2 - t$ oraz $N_t = \int_0^t W_s^4 dW_s$. Wykaż, że ciąg

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} M_{tk/n} (N_{tk/n} - N_{t(k-1)/n})$$

jest zbieżny według prawdopodobieństwa i przedstaw jego granicę w jak najprostszej postaci.

2. Znajdź proces $(A_t)_{t \geq 0}$, którego trajektorie mają wahanie ograniczone na przedziałach skończonych taki, że $A_0 = 0$ oraz proces $X_t = \sin(2W_t - 3t) - A_t$ jest martyngałem lokalnym. Wykaż, że X_t jest martyngałem oraz $\mathbb{E}X_t^2 \leq 4t$.
- 3* Ciągły martyngał lokalny $(M_t)_{t \geq 0}$ spełnia $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle M \rangle_t = \infty$ p.n.. Niech $\tau := \inf\{t \geq 0: \langle M \rangle_t = 1\}$. Wykaż, że $\mathbb{E}(M_\tau - M_0)^2 = 1$.

Kartkówka 3

gr.2, 9 stycznia 2012

1. Znajdź proces $(A_t)_{t \geq 0}$, którego trajektorie mają wahanie ograniczone na przedziałach skończonych taki, że $A_0 = 0$ oraz proces $X_t = \cos(3W_t - 2t) - A_t$ jest martyngałem lokalnym. Wykaż, że X_t jest martyngałem oraz $\mathbb{E}(X_t - 1)^2 \leq 9t$.
2. Niech $M_t = W_t^2 - t$ oraz $N_t = \int_0^t W_s^3 dW_s$. Wykaż, że ciąg

$$S_n = \sum_{k=1}^{5n} M_{tk/n} (N_{tk/n} - N_{t(k-1)/n})$$

jest zbieżny według prawdopodobieństwa i przedstaw jego granicę w jak najprostszej postaci.

- 3* Ciągły martyngał lokalny $(M_t)_{t \geq 0}$ spełnia $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle M \rangle_t = \infty$ p.n.. Niech $\tau := \inf\{t \geq 0: \langle M \rangle_t = 1\}$. Wykaż, że $\mathbb{E}(M_\tau - M_0)^2 = 1$.