Kartkówka 3

gr.1, 4 maja 2010

1. Niech $X_t = \int_0^t e^{5(u-t)} dW_u$. Znajdź rozkład X_t i oblicz $\mathrm{Cov}(X_t, X_s)$ dla $s \geqslant t \geqslant 0$.

2. Załóżmy, że $M = (M_t)_{t \geqslant 0}$ jest ciągłym martyngałem lokalnym takim, że $M_0 = 0$ oraz $\limsup_{t \to \infty} |M_t| = \infty$. Określmy $\tau := \inf\{t \colon |M_t| = 10\}$. Wykaż, że $M^\tau \in \mathcal{M}^{2,c}_\infty$, $\mathbb{E} M_\tau = 0$ oraz $100 = \mathbb{E} M_\tau^2 = \mathbb{E}\langle M \rangle_\tau$.

3* Niech M i N będą ograniczonymi martyngałami ciągłymi. Wykaż, że $\sum_{k=1}^n M_{k/n}(N_{k.n} - N_{(k-1)/n})$ zbiega w L^2 do $\int_0^1 M dN + \langle M, N \rangle_1$.

Kartkówka 3

gr.1, 4 maja 2010

1. Załóżmy, że $M = (M_t)_{t \geqslant 0}$ jest ciągłym martyngałem lokalnym takim, że $M_0 = 0$ oraz $\limsup_{t \to \infty} |M_t| = \infty$. Określmy $\tau := \inf\{t \colon |M_t| = 5\}$. Wykaż, że $M^\tau \in \mathcal{M}^{2,c}_\infty$, $\mathbb{E} M_\tau = 0$ oraz $25 = \mathbb{E} M_\tau^2 = \mathbb{E}\langle M \rangle_\tau$.

2. Niech $X_t = \int_0^t e^{3(u-t)} dW_u$. Znajdź rozkład X_t i oblicz $\mathrm{Cov}(X_t, X_s)$ dla $t \geqslant s \geqslant 0$.

3* Niech M i N będą ograniczonymi martyngałami ciągłymi. Wykaż, że $\sum_{k=1}^n M_{k/n}(N_{k.n} - N_{(k-1)/n})$ zbiega w L^2 do $\int_0^1 M dN + \langle M, N \rangle_1$.

Kartkówka 3

gr.1, 5 maja 2010

1. Niech $X_t = \int_0^t e^{5W_u} dW_u$, oblicz $\mathbb{E}X_t$ oraz $\mathrm{Cov}(X_t, X_s)$ dla $s \geqslant t \geqslant 0$.

2. Niech $\tau := \inf\{t > 0 \colon |W_t| = \sqrt{t+2}\}$. Wykaż, że $\tau < \infty$ p.n. oraz oblicz $\int_0^\tau W_t dW_t$.

3* Załóżmy, że M jest całkowalnym martyngałem lokalnym takim, że $\mathbb{E}\sup_t (M_t)_+ < \infty$. Udowodnij, że M jest podmartyngałem.

Kartkówka 3

gr.2, 5 maja 2010

1. Niech $\tau := \inf\{t > 0 \colon |W_t| = \sqrt{t+5}\}$. Wykaż, że $\tau < \infty$ p.n. oraz oblicz $\int_0^\tau W_t dW_t$.

2. Niech $X_t = \int_0^t e^{2W_u} dW_u$, oblicz $\mathbb{E}X_t$ oraz $\mathrm{Cov}(X_t, X_s)$ dla $t \geqslant s \geqslant 0$.

3* Załóżmy, że M jest całkowalnym martyngałem lokalnym takim, że $\mathbb{E}\sup_t (M_t)_+ < \infty$. Udowodnij, że M jest podmartyngałem.