Kartkówka 3
gr.I, 9 maja 2006

1. Proces $M = (M_t)_{t \geqslant 0}$ ma ciągłe trajektorie $M_0 = 0$ oraz $\limsup_{t\to\infty} M_t = \infty$. Ponadto $(\exp(M_t - t^2), \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem. Oblicz $\mathbf{E}\exp(-\tau^2)$, gdzie $\tau := \inf\{t > 0 \colon M_t = 2\}$.

2. $N_s^{(1)}$ i $N_s^{(2)}$ są niezależnymi procesami Poissona z intensywnością 2 oraz $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s^{(i)} : s \leqslant t, i = 1, 2)$. Czy istnieją takie a, b, że $((N_t^{(1)} - at)(N_t^{(2)} - bt), \mathcal{F}_t)$ jest martyngałem?

3* Dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ istnieje p.n. granica $\lim_{n\to\infty} \frac{|W_t|}{N_t^\alpha}$? ($W$ jest procesem Wienera, a N procesem Poissona z parametrem 1.)

Kartkówka 3
gr.II, 9 maja 2006

1. $N_s^{(1)}$ i $N_s^{(2)}$ są niezależnymi procesami Poissona z intensywnością 5 oraz $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s^{(i)} : s \leqslant t, i = 1, 2)$. Czy istnieją takie a, b, że $((N_t^{(1)} - at)(N_t^{(2)} - bt), \mathcal{F}_s)$ jest martyngałem?

2. Proces $M = (M_t)_{t \geqslant 0}$ ma ciągłe trajektorie $M_0 = 0$ oraz $\limsup_{t\to\infty} M_t = \infty$. Ponadto $(\exp(2M_t - t^2), \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem. Oblicz $\mathbf{E}\exp(-\tau^2)$, gdzie $\tau := \inf\{t > 0 \colon M_t = 3\}$.

3* Dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ istnieje p.n. granica $\lim_{n\to\infty} \frac{|W_t|}{N_t^\alpha}$? ($W$ jest procesem Wienera, a N procesem Poissona z parametrem 1.)

Kartkówka 3

gr.I, 9 maja 2006

1. Proces $M = (M_t)_{t \geqslant 0}$ ma ciągłe trajektorie $M_0 = 0$ oraz $\limsup_{t \to \infty} M_t = \infty$. Ponadto $(M_t^2 - 2t^2, \mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ jest martyngałem. Oblicz $\mathbf{E}\tau^2$, gdzie $\tau := \inf\{t > 0 \colon |M_t| = 3\}$.

2. Proces $(X_t)_{t \geqslant 0}$ jest scentrowany, ma przyrosty niezależne oraz $\mathrm{Var}(X(t)) = t^4$. Znajdź funkcję f taką, że $X_t^2 - f(t)$ jest martyngałem względem filtarcji $\mathcal{F}_t := \sigma(X_s \colon s \leqslant t)$.

3* Dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ istnieje p.n. granica $\lim_{n \to \infty} \frac{|W_t|}{N_t^\alpha}$? ($W$ jest procesem Wienera, a N procesem Poissona z parametrem 1.)

Kartkówka 3

gr.II, 9 maja 2006

1. Proces $(X_t)_{t \geqslant 0}$ jest scentrowany, ma przyrosty niezależne oraz $\mathrm{Var}(X(t)) = e^t$. Znajdź funkcję f taką, że $X_t^2 - f(t)$ jest martyngałem względem filtarcji $\mathcal{F}_t := \sigma(X_s \colon s \leqslant t)$.

2. Proces $M = (M_t)_{t \geqslant 0}$ ma ciągłe trajektorie $M_0 = 0$ oraz $\limsup_{t \to \infty} M_t = \infty$. Ponadto $(M_t^2 - 4t^2, \mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ jest martyngałem. Oblicz $\mathbf{E}\tau^2$, gdzie $\tau := \inf\{t > 0 \colon |M_t| = 1\}$.

3* Dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ istnieje p.n. granica $\lim_{n \to \infty} \frac{|W_t|}{N_t^\alpha}$? ($W$ jest procesem Wienera, a N procesem Poissona z parametrem 1.)