

Kartkówka 2

gr.1, 28 listopada 2016

1. Proces M_t jest martyngałem o trajektoriach ciągłych takim, że $M_0 = 3$ oraz $\limsup_{t \rightarrow \infty} |M_t| = \infty$. Niech $\tau = \inf\{t: |M_t| = 8\}$. Oblicz $\mathbb{P}(M_\tau = 8)$.
2. Załóżmy, że $(X_t)_{t \geq 0}$ jest procesem gaussowskim o niezależnych przyrostach oraz $\mathbb{E}X_t = 3t$, $\text{Var}(X_t) = 2t$. Znajdź funkcję $f: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ taką, że $e^{5X_t - f(t)}$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez X .
- 3* Niech $W = (W_t^1, W_t^2)$ będzie dwuwymiarowym procesem Wienera. Określmy

$$\tau := \inf\{t > 0: W_t^1 \geq W_t^2 + \sqrt{t+2}\}.$$

Wykaż, że $\tau < \infty$ p.n. oraz $\mathbb{E}\tau = \infty$.

Kartkówka 2

gr.2, 28 listopada 2016

1. Załóżmy, że $(X_t)_{t \geq 0}$ jest procesem gaussowskim o niezależnych przyrostach oraz $\mathbb{E}X_t = 2t$, $\text{Var}(X_t) = 5t$. Znajdź funkcję $f: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ taką, że $e^{-3X_t - f(t)}$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez X .
2. Proces M_t jest martyngałem o trajektoriach ciągłych takim, że $M_0 = -2$ oraz $\limsup_{t \rightarrow \infty} |M_t| = \infty$. Niech $\tau = \inf\{t: |M_t| = 5\}$. Oblicz $\mathbb{P}(M_\tau = 5)$.
- 3* Niech $W = (W_t^1, W_t^2)$ będzie dwuwymiarowym procesem Wienera. Określmy

$$\tau := \inf\{t > 0: W_t^1 \geq W_t^2 + \sqrt{t+2}\}.$$

Wykaż, że $\tau < \infty$ p.n. oraz $\mathbb{E}\tau = \infty$.