Kartkówka 2

gr.1, 5 grudnia 2011

1. Załóżmy, że $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem o wartościach dodatnich, ciągłych trajektoriach takim, że $X_0 = 1$, $\limsup_{t\to\infty} X_t = \infty$ p.n. oraz X_t^4 jest martyngałem. Określmy

$$\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : X_t = a\} \text{ dla } a > 0.$$

Uzasadnij, że dla $a > 1 > b > 0$ zachodzi $\mathbb{P}(\tau_a < \tau_b) = \frac{1-b^4}{a^4-b^4}$.

2. Niech $X_t = \int_0^t u^3 dW_u$. Znajdź rozkład X_t i oblicz $\mathrm{Cov}(X_t, X_s)$ dla $s \geqslant t \geqslant 0$.

3* Niech $\tau := \inf\{t \geqslant 1\colon W_t = 0\}$. Wykaż, że $\tau < \infty$ p.n. i oblicz $\mathbb{E}\tau$.

Kartkówka 2

gr.2, 5 grudnia 2011

1. Niech $X_t = \int_0^t u^4 dW_u$. Znajdź rozkład X_t i oblicz $\mathrm{Cov}(X_t, X_s)$ dla $s \geqslant t \geqslant 0$.

2. Załóżmy, że $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem o wartościach dodatnich, ciągłych trajektoriach takim, że $X_0 = 1$, $\limsup_{t\to\infty} X_t = \infty$ p.n. oraz X_t^3 jest martyngałem. Określmy

$$\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : X_t = a\} \text{ dla } a > 0.$$

Uzasadnij, że dla $a > 1 > b > 0$ zachodzi $\mathbb{P}(\tau_a < \tau_b) = \frac{1-b^3}{a^3-b^3}$.

3* Niech $\tau := \inf\{t \geqslant 1\colon W_t = 0\}$. Wykaż, że $\tau < \infty$ p.n. i oblicz $\mathbb{E}\tau$.