Kartkówka 2

gr.1, 30 marca 2010

1. Załóżmy, że $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem o ciągłych trajektoriach takim, że $X_0 = 0$, $\limsup_{t\to\infty} |X_t| = \infty$ p.n. oraz X_t^5 jest martyngałem. Określmy
$$\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : X_t = a\} \text{ dla } a \in \mathbb{R}.$$
Uzasadnij, że dla $a, b > 0$ zachodzi $\mathbf{P}(\tau_a < \tau_{-b}) = \frac{b^5}{a^5+b^5}$.

2. Proces X_t ma skończoną wariancję, przyrosty niezależne oraz średnią zero. Wykaż, że proces $(X_t^2+3X_t-\mathrm{Var}(X_t))_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez X.

3* Udowodnij, że $\limsup_{n\to\infty} \frac{W_{n+1}-W_n}{\sqrt{2\log n}} = 1$ p.n.

Kartkówka 2

gr.2, 30 marca 2010

1. Proces X_t ma skończoną wariancję, przyrosty niezależne oraz średnią zero. Wykaż, że proces $(2X_t^2 + X_t - 2\mathrm{Var}(X_t))_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez X.

2. Załóżmy, że $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem o wartościach dodatnich, ciągłych trajektoriach takim, że $X_0 = 1$, $\limsup_{t\to\infty} X_t = \infty$ p.n. oraz $\ln X_t$ jest martyngałem. Określmy
$$\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : X_t = a\} \text{ dla } a > 0.$$
Uzasadnij, że dla $a > 1 > b > 0$ zachodzi $\mathbf{P}(\tau_a < \tau_b) = \frac{-\ln b}{\ln a-\ln b}$.

3* Udowodnij, że $\limsup_{n\to\infty} \frac{W_{n+1}-W_n}{\sqrt{2\log n}} = 1$ p.n..

Kartkówka 2
gr.1, 31 marca 2010

1. Proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ ma trajektorie ciągłe, $X_0 = 1$, $\limsup_{t\to\infty} |X_t| = \infty$ oraz $(X_t^2 - 3t^6)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem. Niech $\tau := \inf\{t > 0 \colon |X_t| = 4\}$. Znajdź $\mathbb{E}\tau^6$.

2. Niech $W_t = (W_t^{(1)}, W_t^{(2)})$ będzie dwuwymiarowym procesem Wienera. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste a, b, c takie, że $(a|W_t^{(1)}|^2 + bW_t^{(1)}W_t^{(2)} + c|W_t^{(2)}|^2)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez W.

3* Załóżmy, że $M = (M_t)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem względem pewnej filtracji o prawostronnie ciągłych trajektoriach. Wykaż, że M jest martyngałem względem $\mathcal{F}_{t+}^M$.

Kartkówka 2
gr.2, 31 marca 2010

1. Niech $W_t = (W_t^{(1)}, W_t^{(2)})$ będzie dwuwymiarowym procesem Wienera. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste a, b, c takie, że $(a|W_t^{(1)}|^2 + b|W_t^{(2)}|^2 + cW_t^{(1)}W_t^{(2)})_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez W.

2. Proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ ma trajektorie ciągłe, $X_0 = -2$, $\limsup_{t\to\infty} |X_t| = \infty$ oraz $(X_t^2 - 3t^4)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem. Niech $\tau := \inf\{t > 0 \colon |X_t| = 5\}$. Znajdź $\mathbb{E}\tau^4$.

3* Załóżmy, że $M = (M_t)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem względem pewnej filtracji o prawostronnie ciągłych trajektoriach. Wykaż, że M jest martyngałem względem $\mathcal{F}_{t+}^M$.