Kartkówka 2

gr.1, 29 kwietnia 2008

1. Scentrowany proces gaussowski $(G_t)_{t\geqslant 0}$ ma funkcje kowariancji równą $e^{\min\{s,t\}}$.
   a) Wykaż, że $(G_t, \mathcal{F}_t^G)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem.
   b) Czy istnieje funkcja f taka, że $(G_t^2 - f(t), \mathcal{F}_t^G)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem?

2. Proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ ma trajektorie ciągłe, $X_0 = 0$, $\limsup_{t\to\infty} |X_t| = \infty$ oraz $(X_t^2 - 2t^4)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem. Niech $\tau := \inf\{t > 0\colon |X_t| = 4\}$. Znajdź $\mathbb{E}\tau^4$.

3* Wykaż, że
   a) $\mathbb{P}(W_t^2 = t + 1$ dla nieskończenie wielu $t \in \mathbb{R}_+) = 1$,
   b) $\mathbb{P}(W_t^2 = t + 1$ dla pewnego $t \in \mathbb{Q}_+) = 0$.

Kartkówka 2

gr.2, 29 kwietnia 2008

1. Proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ ma trajektorie ciągłe, $X_0 = 0$, $\limsup_{t\to\infty} |X_t| = \infty$ oraz $(2X_t^2 - t^4)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem. Niech $\tau := \inf\{t > 0\colon |X_t| = 3\}$. Znajdź $\mathbb{E}\tau^4$.

2. Scentrowany proces gaussowski $(G_t)_{t\geqslant 0}$ ma funkcje kowariancji równą $e^{\min\{s^2,t^2\}}$.
   a) Wykaż, że $(G_t, \mathcal{F}_t^G)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem.
   b) Czy istnieje funkcja f taka, że $(G_t^2 - f(t), \mathcal{F}_t^G)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem?

3* Wykaż, że
   a) $\mathbb{P}(W_t^2 = t + 1$ dla nieskończenie wielu $t \in \mathbb{R}_+) = 1$,
   b) $\mathbb{P}(W_t^2 = t + 1$ dla pewnego $t \in \mathbb{Q}_+) = 0$.