Kartkówka 1

gr.1, 9 marca 2010

1. Niech $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ będzie filtracją, zaś τ zmienną losową o wartościach w $[0,\infty]$. Wykaż, że τ jest momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geqslant 0}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $t>0$, $\{\tau<t\}\in\mathcal{F}_t$.

2. Niech $(W_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Wienera. Znajdź wszystkie liczby $a>0$ i $b,c\in\mathbb{R}$ takie, że $(b(1+2t)W_{a/(1+2t)}-cW_a)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera.

3* Udowodnij, że zbiór miejsc zerowych procesu Wienera $Z=\{t\geqslant 0 : W_t=0\}$ jest nieograniczony z prawdopodobieństwem 1.

Kartkówka 1

gr.2, 9 marca 2010

1. Niech $(W_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Wienera. Znajdź wszystkie liczby $a>0$ i $b,c\in\mathbb{R}$ takie, że $(b(2+t)W_{a/(2+t)}-cW_{a/2})_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera.

2. Niech $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 1}$ będzie filtracją, zaś τ zmienną losową o wartościach w $[1,\infty]$. Wykaż, że τ jest momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geqslant 1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $t>1$, $\{\tau<t\}\in\mathcal{F}_t$.

3* Udowodnij, że zbiór miejsc zerowych procesu Wienera $Z=\{t\geqslant 0 : W_t=0\}$ jest nieograniczony z prawdopodobieństwem 1.

Kartkówka 1

gr.1, 10 marca 2010

1. Proces $(X_t)_{1\leqslant t\leqslant 2}$ jest gaussowski o średniej zero taki, że $\mathrm{Var}(X_t-X_s) = |\sqrt{t}-\sqrt{s}|$. Czy proces X ma ciągłą modyfikację?

2. Rozpatrzmy następujące podzbiory $\mathbb{R}^{[0,1]}$:

$$A_1 = \{x\colon\ \sup\{|nx_{1/n}| : n = 1,2,\ldots\} < \infty\},$$
$$A_2 = \{x\colon\ \sup\{|\frac{1}{t}x_t| : t \in (0,1]\} < \infty\}.$$

   Które ze zbiorów A_i należą do sigma ciała $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,1]})$? Czy zbiory $A_i \cap C[0,1]$ należą do sigma ciała $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,1]}) \cap C[0,1]$? Odpowiedź uzasadnij.

3* Wykaż, że $\mathbf{P}(\limsup_{t\to\infty} t^{-1/2}(W_{2t}-W_t) = \infty) = 1$.

Kartkówka 1

gr.2, 10 marca 2010

1. Rozpatrzmy następujące podzbiory $\mathbb{R}^{[1,\infty)}$:

$$A_1 = \{x\colon\ \sup\{|tx_t| : t \in [1,\infty)\} < \infty\},$$
$$A_2 = \{x\colon\ \sup\{|nx_n| : n = 1,2,\ldots\} < \infty\}.$$

   Które ze zbiorów A_i należą do sigma ciała $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[1,\infty)})$? Czy zbiory $A_i \cap C[0,1]$ należą do sigma ciała $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[1,\infty)}) \cap C[1,\infty)$? Odpowiedź uzasadnij.

2. Proces $(X_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ jest gaussowski o średniej zero taki, że $\mathrm{Var}(X_t-X_s) = |t^3-s^3|$. Czy proces X ma ciągłą modyfikację?

3* Wykaż, że $\mathbf{P}(\limsup_{t\to\infty} t^{-1/2}(W_{2t}-W_t) = \infty) = 1$.