

Kartkówka 1

gr.I, 24 lutego 2003

1. Niech $(N_t)_{t \geq 0}$ będzie procesem Poissona z parametrem 2
 - a) Oblicz $\mathbf{P}(N_1 = 2, N_2 = 3)$ oraz $\mathbf{P}(0 < N_1 < N_2)$
 - b*) Znajdź rozkład zmiennej losowej $X = \inf\{t \geq 0: N_t = 3\}$
2. Rozpatrzmy następujące podzbiory $\mathbb{R}^{[0,1]}$

$$A_1 = \{x : \sup\{|nx_{1/n}| : n = 1, 2, \dots\} < \infty\},$$

$$A_2 = \{x : \sup\{|\frac{1}{t}x_t| : t \in [0, 1]\} < \infty\}.$$

Które ze zbiorów A_i należą do sigma ciała $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,1]})$? Czy zbiory $A_i \cap C[0, 1]$ należą do sigma ciała $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,1]}) \cap C[0, 1]$? Odpowiedź uzasadnij.

Kartkówka 1

gr.II, 24 lutego 2003

1. Rozpatrzmy następujące podzbiory $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$

$$A_1 = \{x : \sup\{|\sqrt{t}x_t| : t \in [0, \infty)\} < \infty\},$$

$$A_2 = \{x : \sup\{|\sqrt{n}x_n| : n = 1, 2, \dots\} < \infty\}.$$

Które ze zbiorów A_i należą do sigma ciała $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$? Czy zbiory $A_i \cap C[0, \infty)$ należą do sigma ciała $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)}) \cap C[0, \infty)$? Odpowiedź uzasadnij.

2. Niech $(N_t)_{t \geq 0}$ będzie procesem Poissona z parametrem 1/2
 - a) Oblicz $\mathbf{P}(N_2 = 1, N_4 = 3)$ oraz $\mathbf{P}(0 < N_2 < N_4)$
 - b*) Znajdź rozkład zmiennej losowej $X = \inf\{t \geq 0: N_t = 3\}$.

Kartkówka 1

gr.I, 25 lutego 2003

1. Niech $(N_t)_{t \geq 0}$ będzie procesem Poissona z parametrem λ . Które z następujących procesów też są procesami Poissona: a) N_{3t} , b) $3N_t$ c) N_{t^3} , d) $N_{t+3} - N_3$? W przypadku pozytywnej odpowiedzi podaj parametr procesu, w przeciwny przypadku napisz jaki warunek definicji procesu Poissona nie jest spełniony.
2. Niech $(W_t)_{t \geq 0}$ będzie procesem Wienera
a) Oblicz $\mathbf{P}(W_{t_1} \geq W_{t_2} \geq \dots \geq W_{t_n})$ dla $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$.
b*) Wykaż, że prawie wszystkie trajektorie ruchu Browna są niemonotoniczne na każdym przedziale tzn.

$$\mathbf{P}(\exists_{0 \leq a < b} t \rightarrow W_t \text{ monotoniczne na } [a, b]) = 0.$$

Kartkówka 1

gr.II, 25 lutego 2003

1. Niech $(W_t)_{t \geq 0}$ będzie procesem Wienera
a) Oblicz $\mathbf{P}(W_{t_1} \leq W_{t_2} \leq \dots \leq W_{t_n})$ dla $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$.
b*) Wykaż, że prawie wszystkie trajektorie ruchu Browna są niemonotoniczne na każdym przedziale tzn.

$$\mathbf{P}(\exists_{0 \leq a < b} t \rightarrow W_t \text{ monotoniczne na } [a, b]) = 0.$$

2. Niech $(N_t)_{t \geq 0}$ będzie procesem Poissona z parametrem λ . Które z następujących procesów też są procesami Poissona: a) N_{t^2} , b) N_{2t} c) $2N_t$, d) $N_{t+2} - N_2$? W przypadku pozytywnej odpowiedzi podaj parametr procesu, w przeciwny przypadku napisz jaki warunek definicji procesu Poissona nie jest spełniony.