Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:.......................

Egzamin ze Wstępu do Analizy Stochastycznej
grupa I, 10 lutego 2017

Część zadaniowa

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania na osobnych kartkach podpisanych imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy (grupa I) i zadania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–8 pkt. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Niech $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem gaussowskim o średniej zero, którego funkcja kowariancji spełnia nierówność
$$1 \geqslant \mathrm{Cov}(X_t, X_s) \geqslant e^{-|t-s|^{1/4}}.$$
Wykaż, że X ma ciągłą modyfikację oraz każda taka modyfikacja ma trajektorie lokalnie γ-Hölderowskie dla dowolnego $\gamma < 1/8$. (*Wskazówka.* Może się przydać nierówność $e^x \geqslant 1 + x$.)

2. Proces M_t jest martyngałem o trajektoriach ciągłych takim, że $M_0 = 3$ oraz $M_t^2 - t^{3/2}$ jest martyngałem. Niech $\tau = \inf\{t\colon |M_t| = 8\}$. Wykaż, że $\tau < \infty$ p.n. oraz oblicz $\mathbb{P}(M_\tau = 8)$ i $\mathbb{E}\tau^{3/2}$.

3. i) Uzasadnij, że stochastyczne równanie różniczkowe
$$\mathrm{d}X_t = 3X_t\,\mathrm{d}t - 5\cos X_t\,\mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = 7$$
ma dokładnie jedno rozwiązanie.
ii) Niech $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^2 taką, że $|f'(x)| \leqslant C(1 + |x|)$, gdzie C jest pewną stałą dodatnią. Znajdź taką funkcję $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, że proces
$$M_t := f(X_t) - \int_0^t g(X_s)\,\mathrm{d}s$$
jest martyngałem lokalnym. Czy M jest martyngałem?

4. Wykaż, że ciąg zmiennych losowych dany wzorem
$$S_n := \sum_{k=3n+1}^{5n} \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}W_{\frac{k}{n}}^5 + \frac{k-1}{n}W_{\frac{k-1}{n}}^5\right)\left(W_{\frac{k}{n}} - W_{\frac{k-1}{n}}\right)$$
jest zbieżny według prawdopodobieństwa. Przedstaw jego granicę w jak najprostszej postaci.

5. Wykaż, że proces
$$X_t = \frac{e^{3W_t - \frac{9t}{2}}}{1 + \int_0^t e^{3W_s - \frac{9s}{2}}\,\mathrm{d}s}$$
spełnia równanie stochastyczne
$$\mathrm{d}X_t = 3X_t\,\mathrm{d}W_t - X_t^2\,\mathrm{d}t, \quad X_0 = 1.$$

6. i) Znajdź liczbę $a \in \mathbb{R}$ taką, że miara $\mathbb{Q}$ dana wzorem

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A \exp\left(a + \int_0^5 s^2 \, \mathrm{d}W_s\right)\right).$$

jest miarą probabilistyczną na $(\Omega, \mathcal{F})$.
ii) Jaki ma rozkład zmienna $W_5 - W_3$ względem $\mathbb{Q}$?

Część testowa

1. (2pkt) Podaj definicję jednostajnej całkowalności rodziny zmiennych losowych $(X_i)_{i\in I}$.

2. (5pkt) Niech $M_t = \int_0^t \sqrt{5W_u^2 + 1} \, \mathrm{d}W_u$ i $N_t = \int_0^t W_u \, \mathrm{d}M_u$. Oblicz dla $0 < s < t$,
$\mathbb{E}M_sM_t =$ ...., $\mathbb{E}N_t =$ ...., $\mathrm{Var}(N_t) =$......................

3. (3pkt) Podaj definicję momentu zatrzymania τ oraz σ-ciała $\mathcal{F}_\tau$ względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$.

4. (2pkt) Uzupełnij sformułowania
i) Każdy nieujemny martyngał lokalny jest ....
ii) Każdy ograniczony martyngał lokalny jest ....

5. (3pkt) W zależności od rzeczywistego parametru α oblicz

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t(\ln\ln t)^\alpha}{t^{1/2}} =$$

6. (3pkt) Niech $X_t = t^3 W_t$ i $Y_t = \int_0^t W_s^3 \, \mathrm{d}W_s$. Oblicz $\langle X, Y\rangle_t =$

7. (4pkt) Oblicz $\mathbb{E}(W_3^2|W_1) =$ ...... oraz $\mathbb{E}e^{iW_1+2iW_3} =$

8. (3pkt) Zmienna $W_3 + \int_0^4 s \, \mathrm{d}W_s$ ma rozkład

9. (3pkt) Znajdź proces X_t o wahaniu ograniczonym na przedziałach skończonych taki, że $X_0 = 0$ oraz $\cos(t^2 W_t) - X_t$ jest martyngałem lokalnym, $X_t =$..........................

10. (2pkt) Podaj twierdzenie Levy'ego o charakteryzacji procesu Wienera.

Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:.......................

Egzamin ze Wstępu do Analizy Stochastycznej
grupa II, 10 lutego 2017

Część zadaniowa

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania na osobnych kartkach podpisanych imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy (grupa II) i zadania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–8 pkt. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Niech $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem gaussowskim o średniej zero, którego funkcja kowariancji spełnia nierówność
$$1 \geqslant \mathrm{Cov}(X_t, X_s) \geqslant e^{-|t-s|^{1/3}}.$$
Wykaż, że X ma ciągłą modyfikację oraz każda taka modyfikacja ma trajektorie lokalnie γ-Hölderowskie dla dowolnego $\gamma < 1/6$. (*Wskazówka.* Może się przydać nierówność $e^x \geqslant 1 + x$.)

2. Proces M_t jest martyngałem o trajektoriach ciągłych takim, że $M_0 = -1$ oraz $M_t^2 - t^{4/3}$ jest martyngałem. Niech $\tau := \inf\{t\colon |M_t| = 10\}$. Wykaż, że $\tau < \infty$ p.n. oraz oblicz $\mathbb{P}(M_\tau = 10)$ i $\mathbb{E}\tau^{4/3}$.

3. i) Uzasadnij, że stochastyczne równanie różniczkowe
$$\mathrm{d}X_t = 5X_t\,\mathrm{d}t + \cos X_t\,\mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = 2$$
ma dokładnie jedno rozwiązanie.
ii) Niech $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^2 taką, że $|f'(x)| \leqslant C(1 + |x|)$, gdzie C jest pewną stałą dodatnią. Znajdź taką funkcję $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, że proces
$$M_t := f(X_t) - \int_0^t g(X_s)\,\mathrm{d}s$$
jest martyngałem lokalnym. Czy M jest martyngałem?

4. Wykaż, że ciąg zmiennych losowych dany wzorem
$$S_n := \sum_{k=4n+1}^{6n} \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}W^4_{\frac{k}{n}} + \frac{k-1}{n}W^4_{\frac{k-1}{n}}\right)\left(W_{\frac{k}{n}} - W_{\frac{k-1}{n}}\right)$$
jest zbieżny według prawdopodobieństwa. Przedstaw jego granicę w jak najprostszej postaci.

5. Wykaż, że proces
$$X_t = \frac{e^{5W_t - \frac{25t}{2}}}{1 + \int_0^t e^{5W_s - \frac{25s}{2}}\,\mathrm{d}s}$$
spełnia równanie stochastyczne
$$\mathrm{d}X_t = 5X_t\,\mathrm{d}W_t - X_t^2\,\mathrm{d}t, \quad X_0 = 1.$$

6. i) Znajdź liczbę $a \in \mathbb{R}$ taką, że miara $\mathbb{Q}$ dana wzorem

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A \exp\left(a + \int_0^7 s \, \mathrm{d}W_s\right)\right).$$

jest miarą probabilistyczną na $(\Omega, \mathcal{F})$.
ii) Jaki ma rozkład zmienna $W_7 - W_2$ względem $\mathbb{Q}$?

Część testowa

1. (2pkt) Podaj twierdzenie Levy'ego o charakteryzacji procesu Wienera.

2. (2pkt) Uzupełnij sformułowania
i) Każdy ograniczony martyngał lokalny jest ....
ii) Każdy nieujemny martyngał lokalny jest ....

3. (5pkt) Niech $M_t = \int_0^t \sqrt{2W_u^2 + 3}\, \mathrm{d}W_u$ i $N_t = \int_0^t W_u \, \mathrm{d}M_u$. Oblicz dla $0 < s < t$,
$\mathbb{E}M_sM_t =$ ...., $\mathbb{E}N_t =$ ...., $\mathrm{Var}(N_t) =$......................

4. (4pkt) Oblicz $\mathbb{E}(W_5^2|W_2) =$ ...... oraz $\mathbb{E}e^{iW_1+3iW_5} =$

5. (3pkt) Zmienna $W_2 + \int_0^5 s \, \mathrm{d}W_s$ ma rozkład

6. (3pkt) Znajdź proces X_t o wahaniu ograniczonym na przedziałach skończonych taki, że $X_0 = 0$ oraz $\sin(t^3 W_t) - X_t$ jest martyngałem lokalnym, $X_t =$..........................

7. (3pkt) Podaj definicję momentu zatrzymania τ oraz σ-ciała $\mathcal{F}_\tau$ względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$.

8. (3pkt) W zależności od rzeczywistego parametru α oblicz

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{t^{1/2}(\ln\ln t)^\alpha} =$$

9. (3pkt) Niech $X_t = (t+1)^2 W_t$ i $Y_t = \int_0^t W_s^4 \, \mathrm{d}W_s$. Oblicz $\langle X, Y\rangle_t =$

10. (2pkt) Podaj definicję jednostajnej całkowalności rodziny zmiennych losowych $(X_i)_{i\in I}$.