

Imię i nazwisko:..... Numer indeksu:.....

Egzamin ze Wstępu do Analizy Stochastycznej, grupa I, 7 lutego 2025

Część zadaniowa (40pkt)

Spśród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania na osobnych kartkach podpisanych imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy (grupa I) i zadania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–8 pkt. Można (i warto) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach. W poniższych zadaniach (W_t) oznacza proces Wienera.

1. Niech

$$M_t = 5 + \int_0^t s^3 dW_s \quad \text{oraz} \quad \tau = \inf\{t \geq 0: |M_t| = 8\}.$$

- i) Znaleźć taką funkcję $f(t)$, że $M_t^2 - f(t)$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez proces Wienera.
- ii) Wykazać, że τ jest momentem stopu i $\tau < \infty$ p.n.
- iii) Obliczyć $\mathbb{E}\tau^7$.

2. Niech $X_t = \int_0^t e^{2W_s} dW_s$. Znaleźć wszystkie procesy ciągłe A_t i B_t o wahaniu skończonym na przedziałach ograniczonych takie, że $A_0 = B_0 = 0$ oraz procesy $M_t = \sin(X_t) - A_t$, $N_t = e^{3X_t - B_t}$ są martyngałami lokalnymi. Czy M_t jest martyngałem?

3. Wykazać, że ciąg zmiennych losowych dany wzorem

$$S_n := \sum_{k=4n+1}^{7n} \frac{k}{n} W_{k/n}^3 \left(W_{\frac{k}{n}}^4 - W_{\frac{k-1}{n}}^4 \right)$$

jest zbieżny według prawdopodobieństwa. Przedstawić jego granicę w jak najprostszej postaci.

4. Wykazać że istnieje dokładnie jeden proces $(X_t)_{t \geq 0}$ taki, że

$$\frac{X_t}{\arctan(t) + 5} = \int_0^t \sin(X_s) dW_s + \int_0^t \cos(X_s) ds.$$

Jakie stochastyczne równanie różniczkowe spełnia ten proces?

5. Załóżmy, że $(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, W_t^{(3)})$ jest trójwymiarowym procesem Wienera oraz

$$X_t = \int_0^t \sin(W_s^{(1)}) dW_s^{(2)}.$$

Dla jakich liczb $a \in \mathbb{R}$ istnieje $Y \in \Lambda_\infty^2$ taki, że proces $(aX_t + \int_0^t Y_s dW_s^{(3)})_{t \geq 0}$ jest procesem Wienera?

6. i) Wykazać, że stochastyczne równanie różniczkowe

$$dX_t = dW_t + 5 \sin(X_t) dt, \quad X_0 = 0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

ii) Znaleźć miarę probabilistyczną $\mathbb{Q}$ taką, że proces $(X_t)_{t \in [0,3]}$, będący rozwiązaniem powyższego równania, jest procesem Wienera na przedziale $[0, 3]$ względem $\mathbb{Q}$.

Proszę obrócić kartkę, by wypełnić część testową egzaminu!

Część testowa (20pkt)

1. (2pkt) W zależności od rzeczywistego parametru α obliczyć

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{(t \ln \ln t)^\alpha} =$$

2. (2pkt) Podać definicję martyngału lokalnego $(M_t)_{t \geq 0}$ względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

3. (2pkt) Uzupełnić sformułowania

Każdy ograniczony martyngał lokalny jest

Każdy nieujemny martyngał lokalny jest

4. (2pkt) Podać definicję nawiasu skośnego ciągłego martyngału lokalnego $(M_t)_{t \geq 0}$.

5. (2pkt) Uzupełnić sformułowanie nierówności maksymalnej Dooba. Dla martyngału $(M_t)_{t \in [0,3]}$ o prawostronnie ciągłych trajektoriach zachodzi

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0,3]} |M_t|^4 \leq \dots\dots\dots$$

6. (2pkt) Niech $X = \int_0^\infty e^{-5s} dW_s$. Wówczas zmienna X ma rozkład..... oraz $\text{Cov}(X, W_2) = \dots\dots\dots$

7. (2pkt) Niech $\tau = \inf\{t \geq 0: \int_0^t W_s^8 ds = 6\}$ oraz $X = \int_0^\tau W_s^4 dW_s$. Wówczas $\mathbb{E}(X - 3)^2 = \dots\dots\dots$

8. (2pkt) Przedstawić poniższą całkę w postaci nie zawierającej całek stochastycznych:

$$\int_0^t W_s^8 dW_s =$$

9. (2pkt) Podać następujące dwie definicje:

Proces $(X_t)_{t \geq 0}$ jest modyfikacją procesu $(Y_t)_{t \geq 0}$, jeśli

Procesy $(X_t)_{t \geq 0}$ i $(Y_t)_{t \geq 0}$ są nieodróżnialne, jeśli

10. (2pkt) Sformułować twierdzenie Kołmogorowa o istnieniu ciągłej modyfikacji procesu

Imię i nazwisko:..... Numer indeksu:.....

Egzamin ze Wstępu do Analizy Stochastycznej, grupa II, 7 lutego 2025

Część zadaniowa (40pkt)

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania na osobnych kartkach podpisanych imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy (grupa II) i zadania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–8 pkt. Można (i warto) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach. W poniższych zadaniach (W_t) oznacza proces Wienera.

1. Niech

$$M_t = 3 + \int_0^t s^4 dW_s \quad \text{oraz} \quad \tau = \inf\{t \geq 0: |M_t| = 5\}.$$

- i) Znaleźć taką funkcję $f(t)$, że $M_t^2 - f(t)$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez proces Wienera.
- ii) Wykazać, że τ jest momentem stopu i $\tau < \infty$ p.n.
- iii) Obliczyć $\mathbb{E}\tau^9$.

2. Niech $X_t = \int_0^t e^{-3W_s} dW_s$. Znaleźć wszystkie procesy ciągłe A_t i B_t o wahaniu skończonym na przedziałach ograniczonych takie, że $A_0 = B_0 = 0$ oraz procesy $M_t = \cos(X_t) - A_t$, $N_t = e^{2X_t+B_t}$ są martyngałami lokalnymi. Czy M_t jest martyngałem?

3. Wykazać, że ciąg zmiennych losowych dany wzorem

$$S_n := \sum_{k=2n+1}^{6n} \frac{k}{n} W_{k/n}^2 \left(W_{\frac{k}{n}}^5 - W_{\frac{k-1}{n}}^5 \right)$$

jest zbieżny według prawdopodobieństwa. Przedstawić jego granicę w jak najprostszej postaci.

4. Wykazać że istnieje dokładnie jeden proces $(X_t)_{t \geq 0}$ taki, że

$$\frac{X_t}{\arctan(t) + 3} = \int_0^t \cos(X_s) dW_s + \int_0^t \sin(X_s) ds.$$

Jakie stochastyczne równanie różniczkowe spełnia ten proces?

5. Załóżmy, że $(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, W_t^{(3)})$ jest trójwymiarowym procesem Wienera oraz

$$X_t = \int_0^t \cos(W_s^{(1)}) dW_s^{(2)}.$$

Dla jakich liczb $a \in \mathbb{R}$ istnieje $Y \in \Lambda_\infty^2$ taki, że proces $(aX_t - \int_0^t Y_s dW_s^{(3)})_{t \geq 0}$ jest procesem Wienera?

6. i) Wykazać, że stochastyczne równanie różniczkowe

$$dX_t = dW_t - 3 \cos(X_t) dt, \quad X_0 = 0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

ii) Znaleźć miarę probabilistyczną $\mathbb{Q}$ taką, że proces $(X_t)_{t \in [0,3]}$, będący rozwiązaniem powyższego równania, jest procesem Wienera na przedziale $[0, 3]$ względem $\mathbb{Q}$.

Proszę obrócić kartkę, by wypełnić część testową egzaminu!

Część testowa (20pkt)

1. (2pkt) Podać następujące dwie definicje:
Proces $(X_t)_{t \geq 0}$ jest modyfikacją procesu $(Y_t)_{t \geq 0}$, jeśli
Procesy $(X_t)_{t \geq 0}$ i $(Y_t)_{t \geq 0}$ są nieodróżnialne, jeśli
2. (2pkt) Sformułować twierdzenie Kołmogorowa o istnieniu ciągłej modyfikacji procesu

3. (2pkt) W zależności od rzeczywistego parametru α obliczyć

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{(t \ln \ln t)^\alpha} =$$

4. (2pkt) Uzupełnić sformułowanie nierówności maksymalnej Dooba. Dla martyngału $(M_t)_{t \in [0,5]}$ o prawostronnie ciągłych trajektoriach zachodzi

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0,5]} |M_t|^6 \leq \dots\dots\dots$$

5. (2pkt) Niech $X = \int_0^\infty e^{-2s} dW_s$. Wówczas zmienna X ma rozkład..... oraz $\text{Cov}(X, W_3) = \dots\dots\dots$

6. (2pkt) Niech $\tau = \inf\{t \geq 0: \int_0^t W_s^8 ds = 10\}$ oraz $X = \int_0^\tau W_s^4 dW_s$. Wówczas $\mathbb{E}(X + 5)^2 = \dots\dots\dots$

7. (2pkt) Przedstawić poniższą całkę w postaci nie zawierającej całek stochastycznych:

$$\int_0^t W_s^6 dW_s =$$

8. (2pkt) Uzupełnić sformułowania
Każdy nieujemny martyngał lokalny jest
Każdy ograniczony martyngał lokalny jest

9. (2pkt) Podać definicję martyngału lokalnego $(M_t)_{t \geq 0}$ względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

10. (2pkt) Podać definicję nawiasu skośnego ciągłego martyngału lokalnego $(M_t)_{t \geq 0}$.