Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:........................

Egzamin ze Wstępu do Analizy Stochastycznej
grupa I, 13 czerwca 2014

Część zadaniowa

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania na osobnych kartkach podpisanych imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy (grupa I) i zadania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–7 pkt. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Znajdź funkcje $b(x)$ i $\sigma(x)$ takie, że proces
$$X_t = e^{W_t - \frac{1}{2}t}\left(3 + 5\int_0^t e^{-W_s + \frac{s}{2}} ds\right).$$
spełnia stochastyczne równanie różniczkowe
$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t.$$
Czy równanie to ma inne rozwiązanie z warunkiem początkowym $X_0 = 3$?

2. Znajdź taką miarę probabilistyczną $\mathbb{Q}$ na $\mathcal{F}_3^W$, by proces
$$X_t = W_t^2 - t(4W_t + 1) + 4t^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$$
był martyngałem na $(\Omega, \mathcal{F}_3^W, \mathbb{Q})$.

3. Znajdź proces $(A_t)_{t\geqslant 0}$ o wahaniu ograniczonym na przedziałach skończonych taki, że $A_0 = 0$ oraz proces
$$M_t = W_t \sin\left(\int_0^t W_s^3 dW_s\right) - A_t$$
jest martyngałem lokalnym. Czy M jest martyngałem?

4. Niech $X_t = \exp(6W_t - 18t)$ oraz
$$S_n = \sum_{k=4n+1}^{5n} \left|X_{k/n} - X_{(k-1)/n}\right|^2.$$
Wykaż, że ciąg S_n jest zbieżny według prawdopodobieństwa i znajdź jego granicę. Czy ciąg S_n jest zbieżny w L^1?

5. Załóżmy, że $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest ciągłym martyngałem lokalnym, zaś $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ ściśle dodatnim procesem prognozowalnym takim, że
$$\langle X\rangle_t = \int_0^t Y_s ds.$$
Wykaż, że istnieje proces Wienera W taki, że
$$X_t - X_0 = \int_0^t \sqrt{Y_s} dW_s.$$
Wsk. Rozpatrz proces $\int_0^t Y_s^{-1/2} dX_s$.

6. Niech $\tau = \inf\{t > 0 \colon W_t = 5 - 2t\}$.
i) Wykaż, że $\tau < \infty$ p.n.
ii) Oblicz $\mathbb{E}\exp(-6\tau)$. (Wsk. $\exp(\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t)$ jest martyngałem dla dowolnego parametru λ).

Obróć kartkę, by wypełnić część testową egzaminu!

Część testowa

1. (2pkt) Sformułuj twierdzenie o zbieżności martyngałów w L^2.

2. (3pkt) Oblicz $\mathrm{Cov}(W_2 + W_5, W_4) =$ oraz $\mathbb{E}(W_4^2 - 5W_3 | W_2) =$

3. (3pkt) Niech $X = \int_0^\infty (1+t)^{-4} dW_t$. Oblicz $\mathbb{E}e^{2iX} =$

4. (5pkt) Przedstaw następujące granice przy $n \to \infty$ w jak najprostszej postaci:

$$\sum_{k=1}^{5n} \frac{k-1}{n} W^5_{\frac{k-1}{n}} (W_{\frac{k}{n}} - W_{\frac{k-1}{n}}) \xrightarrow{\mathbb{P}}$$

$$\sum_{k=1}^{5n} \frac{k}{n} W^5_{\frac{k}{n}} (W_{\frac{k}{n}} - W_{\frac{k-1}{n}}) \xrightarrow{\mathbb{P}}$$

5. (4pkt) Niech $X_t = \int_0^t u^3 W_u dW_u$. Wówczas dla $0 \leqslant s \leqslant t$, $\mathbb{E}X_t =$, $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) =$ oraz $\langle X, W \rangle_t =$

6. (4pkt) Wyznacz wszystkie parametry β i γ takie, że
   proces $(e^{\beta t} W_t)_{t \geqslant 0}$ jest jednostajnie całkowalny
   funkcje $t \mapsto W_t$ z prawdopodobieństwem 1 są hölderowskie na $[0, 10]$ z wykładnikiem γ
   Odpowiedź:

7. (2pkt) Podaj następujące dwie definicje:
   Proces $(X_t)_{t \geqslant 0}$ jest modyfikacją procesu $(Y_t)_{t \geqslant 0}$, jeśli
   Procesy $(X_t)_{t \geqslant 0}$ i $(Y_t)_{t \geqslant 0}$ są nieodróżnialne, jeśli

8. (2pkt) Podaj definicję martyngału lokalnego względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$.

Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:........................

Egzamin ze Wstępu do Analizy Stochastycznej
grupa II, 13 czerwca 2014

Część zadaniowa

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania na osobnych kartkach podpisanych imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy (grupa II) i zadania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–7 pkt. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Znajdź funkcje $b(x)$ i $\sigma(x)$ takie, że proces
$$X_t = e^{2W_t - 2t}\left(5 + 3\int_0^t e^{-2W_s + 2s} ds\right).$$
spełnia stochastyczne równanie różniczkowe
$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t.$$
Czy równanie to ma inne rozwiązanie z warunkiem początkowym $X_0 = 5$?

2. Znajdź taką miarę probabilistyczną $\mathbb{Q}$ na $\mathcal{F}_2^W$, by proces
$$X_t = W_t^2 - t(6W_t + 1) + 9t^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$$
był martyngałem na $(\Omega, \mathcal{F}_2^W, \mathbb{Q})$.

3. Znajdź proces $(A_t)_{t \geqslant 0}$ o wahaniu ograniczonym na przedziałach skończonych taki, że $A_0 = 0$ oraz proces
$$M_t = W_t \cos\left(\int_0^t W_s^2 dW_s\right) - A_t$$
jest martyngałem lokalnym. Czy M jest martyngałem?

4. Niech $X_t = \exp(3W_t - 9t/2)$ oraz
$$S_n = \sum_{k=3n+1}^{4n} \left|X_{k/n} - X_{(k-1)/n}\right|^2.$$
Wykaż, że ciąg S_n jest zbieżny według prawdopodobieństwa i znajdź jego granicę. Czy ciąg S_n jest zbieżny w L^1?

5. Załóżmy, że $(X_t)_{t \geqslant 0}$ jest ciągłym martyngałem lokalnym, zaś $(Y_t)_{t \geqslant 0}$ ściśle dodatnim procesem prognozowalnym takim, że
$$\langle X \rangle_t = \int_0^t Y_s^2 ds.$$
Wykaż, że istnieje proces Wienera W taki, że
$$X_t - X_0 = \int_0^t Y_s dW_s.$$
Wskazówka. Rozpatrz proces $\int_0^t Y_s^{-1} dX_s$.

6. Niech $\tau = \inf\{t > 0\colon W_t = 7 - \frac{1}{2}t\}$.
i) Wykaż, że $\tau < \infty$ p.n.
ii) Oblicz $\mathbb{E}\exp(-6\tau)$. (Wskazówka: $\exp(\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t)$ jest martyngałem dla dowolnego parametru λ).

Obróć kartkę, by wypełnić część testową egzaminu!

Część testowa

1. (2pkt) Podaj definicję martyngału lokalnego względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$.

2. (4pkt) Wyznacz wszystkie parametry β i γ takie, że
   proces $(e^{-\beta t}W_t)_{t\geqslant 0}$ jest jednostajnie całkowalny
   funkcje $t \mapsto W_t$ z prawdopodobieństwem 1 są hölderowskie na $[0,5]$ z wykładnikiem γ
   Odpowiedź:

3. (5pkt) Przedstaw następujące granice przy $n \to \infty$ w jak najprostszej postaci:

$$\sum_{k=1}^{3n} \frac{k-1}{n} W^6_{\frac{k-1}{n}} (W_{\frac{k}{n}} - W_{\frac{k-1}{n}}) \xrightarrow{\mathbb{P}}$$

$$\sum_{k=1}^{3n} \frac{k}{n} W^6_{\frac{k}{n}} (W_{\frac{k}{n}} - W_{\frac{k-1}{n}}) \xrightarrow{\mathbb{P}}$$

4. (3pkt) Oblicz $\mathrm{Cov}(W_3 + W_7, W_4) =$ oraz $\mathbb{E}(W_5^2 + 2W_4 | W_3) =$

5. (4pkt) Niech $X_t = \int_0^t u^2 W_u dW_u$. Wówczas dla $0 \leqslant s \leqslant t$, $\mathbb{E}X_t =$, $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) =$ oraz $\langle X, W\rangle_t =$

6. (3pkt) Niech $X = \int_0^\infty (1+t)^{-3} dW_t$. Oblicz $\mathbb{E}e^{3iX} =$

7. (2pkt) Podaj następujące dwie definicje:
   Procesy $(X_t)_{t\geqslant 0}$ i $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ są nieodróżnialne, jeśli
   Proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest modyfikacją procesu $(Y_t)_{t\geqslant 0}$, jeśli

8. (2pkt) Sformułuj twierdzenie o zbieżności martyngałów w L^2.