Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:........................

Egzamin ze Wstępu do Analizy Stochastycznej
grupa I, 19 czerwca 2010

Część zadaniowa

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i pełne rozwiązanie każdego z nich napisać na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu i numerem grupy (grupa I).

1. (8pkt) Wykaż, że ciąg
$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n} W_{k/n}^3 (W_{k/n} - W_{(k-1)/n})$$
jest zbieżny według prawdopodobieństwa i znajdź jego granicę.

2. (8pkt) Znajdź miarę probabilistyczną na $(\Omega, \mathcal{F}_3^W)$ taką, że proces $(W_t + t^3 e^{3t})_{0 \leqslant t \leqslant 3}$ jest procesem Wienera względem $\mathbb{Q}$.

3. (8pkt) Proces $(X_t)_{t \geqslant 0}$ ma ciągłe trajektorie, $X_0 = 0$ oraz $X_t^4 - 6t^2$ jest martyngałem. Określmy $\tau := \inf\{t > 0\colon\ |X_t| = (2t^2 + 10)^{1/4}\}$. Oblicz $\mathbb{E}\tau^2$.

4. (8pkt) Rozważmy równanie stochastyczne
$$dX_t = \frac{3}{1 + X_t^2} dt + \frac{1}{\sqrt{1 + X_t^2}} dW_t, \quad X_0 = 0.$$
a) Wykaż, że równanie to ma dokładnie jedno rozwiązanie.
b) Niech $(X_t)_{t \geqslant 0}$ będzie rozwiązaniem tego równania. Znajdź niestałą funkcję $f \in C^2(\mathbb{R})$ taką, że $f(X_t)$ jest martyngałem lokalnym.

5. (8pkt) Załóżmy, że
$$X_t = \int_0^t \sin(W_s) dW_s + \int_0^t \cos(W_s) ds, \quad t \geqslant 0.$$
Znajdź proces A o wahaniu ograniczonym na przedziałach skończonych taki, że $A_0 = 0$ oraz $M_t = W_t \operatorname{arctg}(3X_t) - A_t$ jest martyngałem lokalnym. Czy M_t jest martyngałem?

6. (8pkt) Proces $(X_t)_{1 \leqslant t \leqslant 2}$ jest gaussowski, ma średnią zero oraz $\mathbb{E}|X_t - X_s| \leqslant 10(t - s)^{1/4}$. Wykaż, że proces X ma modyfikację ciągłą. Co można powiedzieć o hölderowskości jej trajektorii?

Część testowa

1. (3pkt) Proces $(X_t)_{t \geqslant 0}$ jest modyfikacją procesu $W_{\sqrt{t}}$. Wynika stąd, że (podkreśl właściwe odpowiedzi): proces X_t ma trajektorie ciągłe, proces X_t ma przyrosty niezależne, proces X_{t^2} jest procesem Wienera, X_t jest procesem gaussowskim.

2. (4pkt) Niech $X_t = \int_0^t e^{-5u} dW_u$. Wówczas X_t ma rozkład.............. oraz $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) =$................

3. (3pkt) Sformułuj twierdzenie Levy'ego o charakteryzacji procesu Wienera.

4. (2pkt) Podaj definicję nawiasu skośnego dwóch martyngałów lokalnych M i N startujących z zera.

5. (3pkt) Załóżmy, że τ jest momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$. Które ze zmiennych losowych muszą być momentami zatrzymania względem tej samej filtracji (podkreśl): τ^2, τ^2+1, $\min\{\tau+2, 2\tau\}$, $\max\{\tau-1, 0\}$.

6. (3pkt) Załóżmy, że $(M_t)_{t\geqslant 0}$ jest jednostajnie całkowalnym, ciągłym martyngałem. Wynika stąd, że (podkreśl właściwe odpowiedzi): $\sup_t \mathbb{E}|M_t| < \infty$, M_t jest zbieżny prawie na pewno, M_t jest zbieżny w L^1, M_t^2 jest jednostajnie całkowalny, $\sqrt{|M_t|}$ jest jednostajnie całkowalny.

7. (2pkt) Sformułuj prawo iterowanego logarytmu dla procesu Wienera.

8. (3pkt) Niech $\tau = \inf\{t > 0\colon\ |W_t| = \sqrt{t+5}\}$. Wówczas $\int_0^\infty W_s dW_{s\wedge\tau} =$......

9. (2pkt) Gęstość zmiennej (W_2, W_7) wynosi $g(x,y) =$...........

10. (3pkt) Niech $Z = \int_0^\infty e^{-2t} W_t dW_t$, wówczas $\mathbb{E}Z =$ ...., $\mathbb{E}Z^2 =$ ....

11. (2pkt) Sformułuj nierówność maksymalną Dooba dla p-tych momentów martyngału z czasem ciągłym.

Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:.......................

Egzamin ze Wstępu do Analizy Stochastycznej
grupa II, 19 czerwca 2010

Część zadaniowa

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i pełne rozwiązanie każdego z nich napisać na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu i numerem grupy (grupa II).

1. (8pkt) Proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ ma ciągłe trajektorie, $X_0 = 0$ oraz $X_t^4 - 5t^2$ jest martyngałem. Określmy $\tau := \inf\{t > 0\colon\ |X_t| = (3t^2 + 6)^{1/4}\}$. Oblicz $\mathbb{E}\tau^2$.

2. (8pkt) Wykaż, że ciąg
$$S_n = \sum_{k=1}^{3n} \frac{k^2}{n^2} W_{k/n}^2 (W_{k/n} - W_{(k-1)/n})$$
jest zbieżny według prawdopodobieństwa i znajdź jego granicę.

3. (8pkt) Załóżmy, że
$$X_t = \int_0^t \cos(W_s) dW_s + \int_0^t \sin(W_s) ds, \quad t \geqslant 0.$$
Znajdź proces A o wahaniu ograniczonym na przedziałach skończonych taki, że $A_0 = 0$ oraz $M_t = W_t \operatorname{arctg}(2X_t) - A_t$ jest martyngałem lokalnym. Czy M_t jest martyngałem?

4. (8pkt) Proces $(X_t)_{0\leqslant t\leqslant 2}$ jest gaussowski, ma średnią zero oraz $\mathbb{E}|X_t - X_s| \leqslant 4(t-s)^{1/5}$. Wykaż, że proces X ma modyfikację ciągłą. Co można powiedzieć o hölderowskości jej trajektorii?

5. (8pkt) Rozważmy równanie stochastyczne
$$dX_t = \frac{2}{1 + X_t^2} dt + \frac{3}{\sqrt{1 + X_t^2}} dW_t, \quad X_0 = 0.$$
a) Wykaż, że równanie to ma dokładnie jedno rozwiązanie.
b) Niech $(X_t)_{t\geqslant 0}$ będzie rozwiązaniem tego równania. Znajdź niestałą funkcję $f \in C^2(\mathbb{R})$ taką, że $f(X_t)$ jest martyngałem lokalnym.

6. (8pkt) Znajdź miarę probabilistyczną na $(\Omega, \mathcal{F}_2^W)$ taką, że proces $(W_t + t^2 e^{2t})_{0\leqslant t\leqslant 2}$ jest procesem Wienera względem $\mathbb{Q}$.

Część testowa

1. (3pkt) Sformułuj twierdzenie Levy'ego o charakteryzacji procesu Wienera.

2. (2pkt) Sformułuj prawo iterowanego logarytmu dla procesu Wienera.

3. (3pkt) Załóżmy, że τ jest momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$. Które ze zmiennych losowych muszą być momentami zatrzymania względem tej samej filtracji (podkreśl): $\min\{\tau+3, 3\tau\}$, τ^4, τ^4+2, $\max\{\tau-2, 0\}$.

4. (3pkt) Niech $\tau = \inf\{t > 0\colon\ |W_t| = \sqrt{t+7}\}$. Wówczas $\int_0^\infty W_s dW_{s\wedge\tau}$ =......

5. (4pkt) Niech $X_t = \int_0^t e^{-4u} dW_u$. Wówczas X_t ma rozkład.............. oraz $\mathrm{Cov}(X_t, X_s)$ =...............

6. (3pkt) Niech $Z = \int_0^\infty e^{-3t} W_t dW_t$, wówczas $\mathbb{E}Z$ = ..., $\mathbb{E}Z^2$ = ...

7. (3pkt) Załóżmy, że $(M_t)_{t\geqslant 0}$ jest jednostajnie całkowalnym, ciągłym martyngałem. Wynika stąd, że (podkreśl właściwe odpowiedzi): $\sqrt{|M_t|}$ jest jednostajnie całkowalny, M_t^2 jest jednostajnie całkowalny, $sup_t\mathbb{E}|M_t| < \infty$, M_t jest zbieżny prawie na pewno, M_t jest zbieżny w L^1,

8. (2pkt) Sformułuj nierówność maksymalną Dooba dla p-tych momentów martyngału z czasem ciągłym.

9. (2pkt) Gęstość zmiennej (W_3, W_5) wynosi $g(x,y)$ =..........

10. (3pkt) Proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest modyfikacją procesu W_{t^2}. Wynika stąd, że (podkreśl właściwe odpowiedzi): X_t jest procesem gaussowskim, proces X_t ma trajektorie ciągłe, proces X_t ma przyrosty niezależne, proces $X_{\sqrt{t}}$ jest procesem Wienera.

11. (2pkt) Podaj definicję nawiasu skośnego dwóch martyngałów lokalnych M i N startujących z zera.