Imię i nazwisko:... Numer indeksu:.......................

Egzamin z Procesów Stochastycznych
grupa I, 3 lutego 2016

Część zadaniowa

Spośród poniższych zadań należy **wybrać cztery** i napisać ich pełne rozwiązania na osobnych kartkach podpisanych imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy (grupa I) i zadania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–8 pkt. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Dana jest jednorodna rodzina Markowa $(X_t)_{t\geqslant 0}$, $(\mathbb{P}_x)_{x\in E}$ na pewnej przestrzeni stanów E o funkcji przejścia $P(\cdot,\cdot,\cdot)$. Wiadomo, iż istnieje $t_0 > 0$ oraz $\Gamma \subseteq E$ o tej własności, że dla każdego $x \in E$,
$$\mathbb{P}_x(X_{t_0} \in \Gamma) \leqslant \frac{1}{4}.$$
Udowodnij, że dla dowolnej liczby $s > t_0$ i dowolnego $x \in E$,
$$\mathbb{P}_x(X_s \in \Gamma) \leqslant \frac{1}{4}.$$

2. Załóżmy, że $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest jednorodnym procesem Markowa o wartościach rzeczywistych i gęstości przejścia $p_t(x,y)$. Czy proces $5X_{4t}^3+10t$ jest procesem Markowa? W przypadku twierdzącej odpowiedzi podaj funkcję przejścia dla tego procesu.

3. Niech $(W_t)_{t\geqslant 0}$, $(\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}^2}$ będzie dwuwymiarową rodziną Wienera. Czy istnieje funkcja g taka, że $\exp(-|W_t|^2/2) - \int_0^t g(W_s)ds$ jest martyngałem względem $\mathbb{P}_x$ dla dowolnego x? Jeśli tak, to ile ona wynosi?

4. Funkcja $u(t,x)$ jest określona wzorem
$$u(t,x) = \mathbb{E}\left[\cos(x+W_t)e^{-\int_0^t |x+W_s|\wedge 1 ds}\right], \quad t \geqslant 0, x\in\mathbb{R},$$
gdzie $(W_t)_{t\geqslant 0}$ jest standardowym procesem Wienera. Znajdź równanie cząstkowe, które spełnia u. Odpowiedź uzasadnij.

5. Niech $(W_t)_{t\geqslant 0}$, $(\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}}$ będzie jednowymiarową rodziną Wienera. Oblicz dla $x, y < 0$
$$\mathbb{P}_x\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant 10} W_s \geqslant 0, W_{10} \leqslant y\right).$$

Obróć kartkę, by wypełnić część testową egzaminu!

Część testowa

1. (3pkt) Niech P^t będzie półgrupą generowaną przez proces Poissona z intensywnością $\lambda = 3$. Wówczas dla $f\colon \mathbb{Z} \to [-1,1]$,
$P^t f(4) =$

2. (3pkt) Sformułuj twierdzenie podające warunki dostateczne dla tego, by rodzina Markowa $(X_t)_{t\geqslant 0}$ o wartościach rzeczywistych miała mocną własność Markowa względem filtacji $\mathcal{F}^X_{\leqslant t+}$.

3. (3pkt) Sformułuj twierdzenie Yamady-Watanabe.

4. (3pkt) Niech $\sigma(x) = 1$ dla $x \geqslant 0$ oraz $\sigma(x) = -1$ dla $x < 0$. Wówczas równanie $dX_t = \sigma(X_t)dW_t$ z warunkiem początkowym $X_0 = 0$ ma (podkreśl właściwe odpowiedzi) mocne rozwiązanie, słabe rozwiązanie, rozwiązanie jednoznaczne w sensie trajektorii, rozwiązanie jednoznaczne w sensie rozkładu.

5. (6pkt) Uzupełnij: $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ jest jednorodnym procesem Markowa na przestrzeni stanów $E = \{1, 2\}$ z macierzą przejścia
$$P^t = a\begin{pmatrix} 2 + e^{-4t} & b + ce^{-4t} \\ d + fe^{-4t} & 1 + ge^{-4t} \end{pmatrix}.$$
Wówczas $a =$......,$b =$ ...., $c =$ ......, $d =$ ....., $f =$ ...., $g =$ .... Jeśli dodatkowo X jest procesem stacjonarnym, to $\mathbb{P}(X_2 = 1) =$............

6. (4pkt) Dana jest jednorodna rodzina Markowa $((X_t)_{t\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}})$ o gęstości przejścia $p_t(x, y)$. Wówczas dla $x \in \mathbb{R}$,
a) $\mathbb{E}_x(e^{-2|X_2|}|X_1) =$

   b) $\mathbb{P}_x(X_3 > X_2 > 0) =$

7. (4pkt) Podaj definicję półgrupy P^t związaną z jednorodną rodziną Markowa $((X_t)_{t\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}})$. Na jakiej przestrzeni jest określona ta półgrupa? Jak jest zdefiniowany generator półgrupy P^t?

8. (6pkt) Co to znaczy, że równanie stochastyczne

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dW_t + b(t, X_t)dt$$

z warunkiem początkowym $X_0 = 7$ ma
a) mocne rozwiązanie

b) słabe rozwiązanie

c) rozwiązanie jednoznaczne w sensie trajektorii

d) rozwiązanie jednoznaczne w sensie rozkładu

9. (3pkt) Niech $(X_t)_{t\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\{1,2,3\}}$ będzie jednorodną rodziną Markowa o wartościach w trójelementowej przestrzeni stanów $\{1, 2, 3\}$, prawostronnie ciągłych trajektoriach i generatorze infinitezymalnym

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Niech $\tau := \inf\{t > 0\colon X_t \neq X_0\}$ oraz $\sigma = \inf\{t > \tau\colon X_t = 1\}$. Oblicz $\mathbb{E}_1\sigma =$........

10. (3pkt) Sformułuj problem martyngałowy, którego rozwiązanie jest równoważne istnieniu słabego rozwiązania równania

$$dX_t = \sin(X_t + t)dW_t + h(X_t)dt, \quad X_0 = 1,$$

gdzie h jest ograniczoną funkcją borelowską na $\mathbb{R}$.

Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:.......................

Egzamin z Procesów Stochastycznych
grupa II, 3 lutego 2016

Część zadaniowa

Spośród poniższych zadań należy **wybrać cztery** i napisać ich pełne rozwiązania na osobnych kartkach podpisanych imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy (grupa II) i zadania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–8 pkt. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Załóżmy, że $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest jednorodnym procesem Markowa o wartościach rzeczywistych i gęstości przejścia $p_t(x,y)$. Czy proces $3X_{2t}^5+7t$ jest procesem Markowa? W przypadku twierdzącej odpowiedzi podaj funkcję przejścia dla tego procesu.

2. Niech $(W_t)_{t\geqslant 0}$, $(\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}}$ będzie jednowymiarową rodziną Wienera. Oblicz dla $x,y<0$
$$\mathbb{P}_x\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant 5} W_s\geqslant 0, W_5\leqslant y\right).$$

3. Dana jest jednorodna rodzina Markowa $(X_t)_{t\geqslant 0}$, $(\mathbb{P}_x)_{x\in E}$ na pewnej przestrzeni stanów E o funkcji przejścia $P(\cdot,\cdot,\cdot)$. Wiadomo, iż istnieje $t_0>0$ oraz $\Gamma\subseteq E$ o tej własności, że dla każdego $x\in E$,
$$\mathbb{P}_x(X_{t_0}\in\Gamma)\leqslant\frac{1}{3}.$$
Udowodnij, że dla dowolnej liczby $s>t_0$ i dowolnego $x\in E$,
$$\mathbb{P}_x(X_s\in\Gamma)\leqslant\frac{1}{3}.$$

4. Funkcja $u(t,x)$ jest określona wzorem
$$u(t,x)=\mathbb{E}\left[\sin(x+W_t)e^{-\int_0^t |x+W_s|\wedge 2ds}\right],\quad t\geqslant 0, x\in\mathbb{R},$$
gdzie $(W_t)_{t\geqslant 0}$ jest standardowym procesem Wienera. Znajdź równanie cząstkowe, które spełnia u. Odpowiedź uzasadnij.

5. Niech $(W_t)_{t\geqslant 0}$, $(\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}^2}$ będzie dwuwymiarową rodziną Wienera. Czy istnieje funkcja g taka, że $\exp(-2|W_t|^2)-\int_0^t g(W_s)ds$ jest martyngałem względem $\mathbb{P}_x$ dla dowolnego x? Jeśli tak, to ile ona wynosi?

Obróć kartkę, by wypełnić część testową egzaminu!

Część testowa

1. (6pkt) Co to znaczy, że równanie stochastyczne

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dW_t + b(t, X_t)dt$$

z warunkiem początkowym $X_0 = 7$ ma
a) słabe rozwiązanie

b) mocne rozwiązanie

c) rozwiązanie jednoznaczne w sensie rozkładu

d) rozwiązanie jednoznaczne w sensie trajektorii

2. (3pkt) Niech $(X_t)_{t\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\{1,2,3\}}$ będzie jednorodną rodziną Markowa o wartościach w trójelementowej przestrzeni stanów $\{1, 2, 3\}$, prawostronnie ciągłych trajektoriach i generatorze infinitezymalnym

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Niech $\tau := \inf\{t > 0\colon X_t \neq X_0\}$ oraz $\sigma = \inf\{t > \tau\colon X_t = 2\}$. Oblicz $\mathbb{E}_2\sigma =$...........

3. (4pkt) Dana jest jednorodna rodzina Markowa $((X_t)_{t\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}})$ o gęstości przejścia $p_t(x, y)$. Wówczas dla $x \in \mathbb{R}$,
b) $\mathbb{P}_x(X_3 > 0 > X_2) =$

a) $\mathbb{E}_x(e^{-5|X_3|}|X_1) =$

4. (3pkt) Sformułuj twierdzenie podające warunki dostateczne dla tego, by rodzina Markowa $(X_t)_{t\geqslant 0}$ o wartościach rzeczywistych miała mocną własność Markowa względem filtracji $\mathcal{F}^X_{\leqslant t+}$.

5. (3pkt) Niech $\sigma(x) = 1$ dla $x \geqslant 0$ oraz $\sigma(x) = -1$ dla $x < 0$. Wówczas równanie $dX_t = \sigma(X_t)dW_t$ z warunkiem początkowym $X_0 = 0$ ma (podkreśl właściwe odpowiedzi) słabe rozwiązanie, mocne rozwiązanie, rozwiązanie jednoznaczne w sensie rozkładu, rozwiązanie jednoznaczne w sensie trajektorii.

6. (3pkt) Niech P^t będzie półgrupą generowaną przez proces Poissona z intensywnością $\lambda = 5$. Wówczas dla $f\colon \mathbb{Z} \to [-1, 1]$,
   $P^t f(2) =$

7. (6pkt) Uzupełnij: $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ jest jednorodnym procesem Markowa na przestrzeni stanów $E = \{1, 2\}$ z macierzą przejścia

$$P^t = a\begin{pmatrix} 5 + e^{-6t} & b + ce^{-6t} \\ d + fe^{-6t} & 1 + ge^{-6t} \end{pmatrix}.$$

   Wówczas $a =$......,$b =$ ...., $c =$ ......, $d =$ ....., $f =$ ...., $g =$ .... Jeśli dodatkowo X jest procesem stacjonarnym, to $\mathbb{P}(X_1 = 2) =$............

8. (3pkt) Sformułuj twierdzenie Yamady-Watanabe.

9. (4pkt) Podaj definicję półgrupy P^t związaną z jednorodną rodziną Markowa $((X_t)_{t\geqslant 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}})$. Na jakiej przestrzeni jest określona ta półgrupa? Jak jest zdefiniowany generator półgrupy P^t?

10. (3pkt) Sformułuj problem martyngałowy, którego rozwiązanie jest równoważne istnieniu słabego rozwiązania równania

$$dX_t = g(X_t + t)dW_t + \sin(X_t)dt, \quad X_0 = 1,$$

   gdzie g jest ograniczoną funkcją borelowską na $\mathbb{R}$.