

Imię i nazwisko:.....

**Egzamin z procesów stochastycznych
grupa I, 5 czerwca 2002**

Uwaga: W poniższych zadaniach $W = (W_t)_{t \geq 0}$ oznacza zawsze standardowy proces Wienera w \mathbb{R} , a $N = (N_t)_{t \geq 0}$ proces Poissona z intensywnością λ .

1. Proces $(X_t)_{t \geq 0}$ jest procesem gaussowskim. Które z poniższych procesów muszą być gaussowskie (podkreśl właściwe odpowiedzi)?
 $X_t + X_{t+1}$; $|X_t|$; $t^2 X_{5t}$; $X_t X_{t+1}$; $tX_t - X_1$.
2. τ i σ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Które z następujących zmiennych losowych muszą być momentami zatrzymania względem tej filtracji (podkreśl)?
 $\tau \wedge \sigma + 1$; $(\tau - 1) \vee 0$; 3τ ; σ^2 .
3. Napisz równanie Chapmana-Kołmogorowa dla jednorodnych funkcji przejścia

$$P_{s+t}(x, \Gamma) =$$

4. Niech $\tau_a = \inf\{t : W_t \geq a\}$. Dla $a > 0$ oblicz $\mathbf{P}(\tau_a \leq 1) =$
5. Uzupełnij następujące stwierdzenie: Proces $(W_t^2 - \lambda t)_{t \geq 0}$ jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_{\leq t}^W$ wtedy i tylko wtedy gdy λ, zaś nadmartyngałem względem tej samej filtracji wtedy i tylko wtedy gdy λ
6. Czy następujące procesy są procesami Markowa? W przypadku pozytywnej odpowiedzi podaj funkcję przejścia.
 - a) $(N_t)_{t \geq 0}$
 - b) $(t^2 W_t)_{t \geq 0}$
 - c) $(\sup_{0 \leq s \leq t} N_t)_{t \geq 0}$
 - d) $(\sup_{0 \leq s \leq t} W_t)_{t \geq 0}$.
7. Jaki rozkład ma zmienna $W_1 - 2W_2 + W_3$?
8. Dla $0 < t < s$ oblicz $\mathbf{E}(N_s^2 - N_s | \mathcal{F}_{\leq t}^N) =$
9. Dla $0 < t < s$ oblicz $\mathbf{E}(W_s^3 | \mathcal{F}_{\leq t}^W) =$
10. $(X_t)_{t \geq 0}$ jest procesem Markowa z funkcją przejścia $P_{s,t}(\cdot, \cdot)$ takim, że $\mathbf{P}(X_0 = x) = 1$. Dla $0 < s < t$ oblicz

$$\mathbf{P}(X_s \in \Gamma_1, X_t \in \Gamma_2) =.$$

11. Literą W (odpowiednio P) oznacz własności, które posiadają prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera (odp. Poissona):
prawostronna ciągłość ciągłość różniczkowalność monotoniczność hölderowskość
12. Niech $(M_t)_{t \geq 0}$ będzie prawostronnie ciągłym martyngałem. Które z poniższych warunków implikują istnienie prawie na pewno granicy $\lim_{t \rightarrow \infty} M_t$? (podkreśl):
 $\forall_{t \geq 0} M_t \geq 0$; $\sup_t \mathbf{E}M_t < \infty$; $\sup_t \mathbf{E}|M_t| < \infty$; $\mathbf{E} \sup_t |M_t| < \infty$.
13. Napisz którąś z wersji mocnej własności Markowa
14. Uzupełnij sformułowanie twierdzenia Kołmogorowa: $(X_t)_{t \in [0,1]}$ ma ciągłą modyfikację jeśli \leq , przy czym
15. Uzupełnij: $X = (X_t)_{t \geq 0}$ jest jednorodnym procesem Markowa na przestrzeni stanów $E = \{1, 2\}$ z macierzą przejścia
- $$P^t = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 + 2e^{-4t} & a(t) \\ 3 - 3e^{-4t} & b(t) \end{pmatrix}.$$
- Wówczas $a(t) = \dots\dots\dots$, $b(t) = \dots\dots\dots$. Niech A będzie generatorem półgrupy wyznaczonej przez X . Wówczas dla $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzi $Af(1) = \dots\dots\dots$, $Af(2) = \dots\dots\dots$.
16. Podaj definicję progresywnej mierzalności procesu $(X_t)_{t \geq 0}$ względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.
17. Niech $(M_t)_{t \geq 0}$ będzie prawostronnie ciągłym martyngałem. Które z poniższych warunków implikują jednostajną całkowalność M_t (podkreśl):
zbieżność p.n. przy $t \rightarrow \infty$; zbieżność w L^1 przy $t \rightarrow \infty$; $\forall_{t \geq 0} M_t \geq 0$; $\mathbf{E} \sup_t |M_t| < \infty$.
18. Proces $(W_t 1_{W_t \neq 1})_{t \geq 0}$ ma ciągłe trajektorie, modyfikację ciągłą, jest nieodróżnialny od procesu ciągłego, jest procesem gaussowskim (podkreśl właściwe odpowiedzi).
19. Podaj definicję rezolwenty półgrupy P^t . Jaki związek zachodzi między rezolwentą a generatorem mocno ciągłej półgrupy kontrakcji?

Imię i nazwisko:.....

Egzamin z procesów stochastycznych
grupa II, 5 czerwca 2002

Uwaga: W poniższych zadaniach $W = (W_t)_{t \geq 0}$ oznacza zawsze standardowy proces Wienera w \mathbb{R} , a $N = (N_t)_{t \geq 0}$ proces Poissona z intensywnością λ .

1. Jaki rozkład ma zmienna $2W_1 - 3W_2 + W_3$?
2. Dla $0 < t < s$ oblicz $\mathbf{E}(W_s^3 + W_s | \mathcal{F}_{\leq t}^W) =$
3. Dla $0 < t < s$ oblicz $\mathbf{E}(N_s^2 | \mathcal{F}_{\leq t}^N) =$
4. Proces $(X_t)_{t \geq 0}$ jest procesem gaussowskim. Które z poniższych procesów muszą być gaussowskie (podkreśl właściwe odpowiedzi)?
 X_t^3 ; $X_{2t} - 2tX_1$; $\sqrt{t}X_t$; $X_{3t} + 3X_t$; $X_t X_{2t}$;
5. Napisz równanie Chapmana-Kołmogorowa dla jednorodnych funkcji przejścia

$$P_{s+t}(x, \Gamma) =$$

6. τ i σ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Które z następujących zmiennych losowych muszą być momentami zatrzymania względem tej filtracji (podkreśl)?
 $(\tau - 1) \vee \sigma$; $(\tau + 1) \wedge 3$; $\sqrt{\tau}$; 5σ .
7. Niech $\tau_a = \inf\{t : W_t \geq a\}$. Dla $s > 0$ oblicz $\mathbf{P}(\tau_1 \leq s) =$
8. Uzupełnij następujące stwierdzenie: Proces $(\lambda W_t^2 - t)_{t \geq 0}$ jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_{\leq t}^W$ wtedy i tylko wtedy gdy λ, zaś nadmartyngałem względem tej samej filtracji wtedy i tylko wtedy gdy λ
9. Czy następujące procesy są procesami Markowa? W przypadku pozytywnej odpowiedzi podaj funkcję przejścia.

a) $(\sqrt{t}W_t)_{t \geq 0}$

b) $(N_t)_{t \geq 0}$

c) $(\sup_{0 \leq s \leq t} W_t)_{t \geq 0}$

d) $(\sup_{0 \leq s \leq t} N_t)_{t \geq 0}$.

10. Napisz którąś z wersji mocnej własności Markowa

11. Niech $(M_t)_{t \geq 0}$ będzie prawostronnie ciąglym martyngałem. Które z poniższych warunków implikują istnienie prawie na pewno granicy $\lim_{t \rightarrow \infty} M_t$? (podkreśl):
 $\forall t \geq 0 \ M_t \leq 0$; $\sup_t \mathbf{E}|M_t| < \infty$; $\sup_t \mathbf{E}M_t < \infty$; $\mathbf{E} \sup_t |M_t| < \infty$.
12. $(X_t)_{t \geq 0}$ jest procesem Markowa z funkcją przejścia $P_{s,t}(\cdot, \cdot)$ takim, że $\mathbf{P}(X_1 = x) = 1$. Dla $1 < s < t$ oblicz

$$\mathbf{P}(X_s \in \Gamma_1, X_t \in \Gamma_2) = .$$

13. Uzupełnij sformułowanie twierdzenia Kołmogorowa: $(X_t)_{t \in [0,1]}$ ma ciągłą modyfikację jeśli \leq , przy czym
14. Literą W (odpowiednio P) oznacz własności, które posiadają prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera (odp. Poissona):
ciągłość prawostronna ciągłość monotoniczność różniczkowalność hölderowskość
15. Proces $(W_t 1_{|W_t| \neq 2})_{t \geq 0}$ ma ciągłe trajektorie, modyfikację ciągłą, jest nieodróżnialny od procesu ciągłego, jest procesem gaussowskim (podkreśl właściwe odpowiedzi).
16. Podaj definicję progresywnej mierzalności procesu $(X_t)_{t \geq 0}$ względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

17. Niech $(M_t)_{t \geq 0}$ będzie prawostronnie ciąglym martyngałem. Które z poniższych warunków implikują jednostajną całkowalność M_t (podkreśl):
 $\forall t \geq 0 \ M_t \geq 0$; $\mathbf{E} \sup_t |M_t| < \infty$; zbieżność p.n. przy $t \rightarrow \infty$; zbieżność w L^1 przy $t \rightarrow \infty$.
18. Uzupełnij: $X = (X_t)_{t \geq 0}$ jest jednorodnym procesem Markowa na przestrzeni stanów $E = \{1, 2\}$ z macierzą przejścia

$$P^t = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} a(t) & 3 - 3e^{-2t} \\ 4 - 4e^{-2t} & b(t) \end{pmatrix}.$$

Wówczas $a(t) = \dots\dots\dots$, $b(t) = \dots\dots\dots$. Niech A będzie generatorem półgrupy wyznaczonej przez X . Wówczas dla $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzi $Af(1) = \dots\dots\dots$, $Af(2) = \dots\dots\dots$.

19. Podaj definicję rezolwenty półgrupy P^t . Jaki związek zachodzi między rezolwentą a generatorem mocno ciągłej półgrupy kontrakcji?