Imię i nazwisko:... Numer indeksu:........................

Egzamin z Procesów Stochastycznych I
grupa I, 29 czerwca 2006

Uwaga: W poniższych zadaniach $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$ oznacza zawsze standardowy proces Wienera w $\mathbb{R}$, a $N = (N_t)_{t \geqslant 0}$ proces Poissona z intensywnością λ.

Część zadaniowa

Pełne rozwiązania poniższych zadań należy napisać na osobnych kartkach.

1. (8pkt) Dana jest jednorodna w czasie rodzina Markowa $(X_t)_{t \geqslant 0}$ na pewnej przestrzeni stanów E o funkcji przejścia $P_t(\cdot, \cdot)$. Wiadomo, iż istnieje $t_0 > 0$ oraz $\Gamma \subseteq E$ o tej własności, że dla każdego $x \in E$,
$$\mathbf{P}_x(X_{t_0} \in \Gamma) \leqslant 1/2.$$
Udowodnij, że dla dowolnej liczby $s > t_0$ i dowolnego $x \in E$,
$$\mathbf{P}_x(X_s \in \Gamma) \leqslant 1/2.$$

2. (8pkt) Wyznacz wszystkie funkcje $f : [0, \pi/2] \to (0, \infty)$ takie, że proces $X_t = f(t) W_{2 \sin t}$ ma przyrosty niezależne na $[0, \pi/2]$. Czy istnieje f dla którego X jest procesem Wienera na $[0, \pi/2]$?

3. (8pkt) Załóżmy, że $(X_t)_{t \geqslant 0}$ jest jednorodnym procesem Markowa o wartościach rzeczywistych i gęstości przejścia $p_t(x, y)$. Czy proces $5X_{4t}^3$ jest procesem Markowa? W przypadku twierdzącej odpowiedzi podaj funkcję przejścia dla tego procesu.

4. (8pkt) a) Znajdź wszystkie funkcje $f(s)$ takie, że $(W_s^3 - f(s) W_s)$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji generowanej przez W_t.
b) Czy istnieje wielomian stopnia trzeciego $p(x)$ taki, że $p(W_t)$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji generowanej przez W_t?

Część testowa

1. (3pkt) Oblicz $\mathbf{P}(\inf_{0 \leqslant t \leqslant 3} W_t \leqslant -5) =$

2. (3pkt) τ jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}^W_{\leqslant t}$ takim, że $\mathbf{P}(\tau < \infty) = 1$. Wynika stąd, że (podkreśl prawidłowe odpowiedzi): $\mathbf{E} W_\tau = 0$, $\mathbf{E} W_{\tau \wedge 1} = 0$, $\mathbf{E} W_\tau^2 \leqslant \mathbf{E}\tau$, $\mathbf{E} W_\tau^2 \geqslant \mathbf{E}\tau$.

3. (3pkt) Podaj warunki dostateczne dla tego, by rodzina Markowa $(X_t)_{t \geqslant 0}$ o wartościach rzeczywistych miała mocną własność Markowa względem filtacji $\mathcal{F}^X_{\leqslant t+}$.

4. (3pkt) Które z poniższych własności implikują zbieżność w L^2 przy $t \to \infty$ martyngału $(X_t)_{t \geqslant 0}$ o ciągłych trajektoriach (podkreśl): $\mathbf{E} \sup_t X_t^2 < \infty$, $\sup_t \mathbf{E} X_t^2 < \infty$, jednostajna całkowalność (X_t), jednostajna całkowalność (X_t^2).

5. (3pkt) Proces X ma te same rozkłady skończenie wymiarowe, co proces Wienera W. Wynika stąd, że (podkreśl prawidłowe odpowiedzi): istnieje proces Wienera będący modyfikacją X, X jest procesem Markowa, $\lim_{t\to\infty} X_t/t = 0$ p.n., X jest martyngałem względem $\mathcal{F}^X_{\leqslant t}$.

6. (3pkt) Które z poniższych procesów są gaussowskie (podkreśl): $W_{4t}+\sin t$, $(W_{2t}+W_t)I_{W_t\neq W_{2t}}$, $(W_{2t}+W_t)I_{W_t\geqslant W_{2t}}$, W_tW_1.

7. (3pkt) Podaj gęstość dwuwymiarowej zmiennej losowej (W_2, W_7).

8. (5pkt) Oblicz
   a) $\mathbf{P}(W_2 - 3W_3 + 4W_7 \leqslant 2) =$

   b) $\mathbf{P}(N_5 = 3|\mathcal{F}^N_{\leqslant 4}) =$

   c) $\mathbf{P}(N_4 = N_3 \geqslant N_1 + 1) =$

9. (3pkt) Niech A będzie generatorem półgrupy dla procesu Wienera W. Czy funkcja $f(t) = e^{-t^2}$ należy do $D(A)$? Jeśli tak, to oblicz $Af =$

10. (2pkt) Podaj definicję progresywnej mierzalności procesu $(X_t)_{t\in[0,2]}$ o wartościach rzeczywistych.

11. (3pkt) W zależności od $\alpha \in \mathbb{R}$ oblicz

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{|t|^\alpha} =$$

12. (4pkt) Uzupełnij: $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ jest jednorodnym procesem Markowa na przestrzeni stanów $E = \{1, 2\}$ z macierzą przejścia

$$P^t = a\begin{pmatrix} 2+e^{-4t} & b+ce^{-4t} \\ d+fe^{-4t} & 1+ge^{-4t} \end{pmatrix}.$$

Wówczas $a =$......,$b =$ ...., $c =$ ......, $d =$ ....., $e =$ ....., $f =$ ...., $g =$ .... Jeśli dodatkowo X jest procesem stacjonarnym, to $\mathbf{P}(X_2 = 1) =$............

Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:........................

Egzamin z Procesów Stochastycznych I
grupa II, 29 czerwca 2006

Uwaga: W poniższych zadaniach $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$ oznacza zawsze standardowy proces Wienera w $\mathbb{R}$, a $N = (N_t)_{t \geqslant 0}$ proces Poissona z intensywnością λ.

Część zadaniowa

Pełne rozwiązania poniższych zadań należy napisać na osobnych kartkach.

1. (8pkt) Wyznacz wszystkie funkcje $f : [0, \pi] \to (0, \infty)$ takie, że proces $X_t = f(t) W_{\sin(t/2)}$ ma przyrosty niezależne na $[0, \pi]$. Czy istnieje f dla którego X jest procesem Wienera na $[0, \pi]$?
2. (8pkt) a) Znajdź wszystkie funkcje $f(s)$ takie, że $(W_s^3 + f(s) W_s)$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji generowanej przez W_t.
   b) Czy istnieje wielomian stopnia trzeciego $p(x)$ taki, że $p(W_t)$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji generowanej przez W_t?
3. (8pkt) Dana jest jednorodna w czasie rodzina Markowa (X_t) na pewnej przestrzeni stanów E o funkcji przejścia $P_t(\cdot, \cdot)$. Wiadomo, iż istnieje $t_0 > 0$ oraz $\Gamma \subseteq E$ o tej własności, że dla każdego $x \in E$,
   $$\mathbf{P}_x(X_t \in \Gamma) \geqslant 1/2.$$
   Udowodnij, że dla dowolnej liczby $s > t_0$ i dowolnego $x \in E$,
   $$\mathbf{P}_x(X_s \in \Gamma) \geqslant 1/2.$$
4. (8pkt) Załóżmy, że $(X_t)_{t \geqslant 0}$ jest jednorodnym procesem Markowa o wartościach rzeczywistych i gęstości przejścia $p_t(x, y)$. Czy proces $3X_{2t}^5$ jest procesem Markowa? W przypadku twierdzącej odpowiedzi podaj funkcję przejścia dla tego procesu.

Część testowa

1. (3pkt) Podaj gęstość dwuwymiarowej zmiennej losowej (W_3, W_9).

2. (3pkt) Które z poniższych własności implikują zbieżność w L^2 przy $t \to \infty$ martyngału $(X_t)_{t \geqslant 0}$ o ciągłych trajektoriach (podkreśl): jednostajna całkowalność (X_t), jednostajna całkowalność (X_t^2), $\sup_t \mathbf{E} X_t^2 < \infty$, $\mathbf{E} \sup_t X_t^2 < \infty$.
3. (4pkt) Uzupełnij: $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ jest jednorodnym procesem Markowa na przestrzeni stanów $E = \{1, 2\}$ z macierzą przejścia
   $$P^t = a \begin{pmatrix} 1 + 2e^{-3t} & b + ce^{-3t} \\ d + fe^{-3t} & g + e^{-3t} \end{pmatrix}.$$
   Wówczas a =......,b = ..., c = ..., d = ..., e = ..., f = ..., g = ... Jeśli dodatkowo X jest procesem stacjonarnym, to $\mathbf{P}(X_3 = 1)$ =............

4. (3pkt) Proces X ma te same rozkłady skończenie wymiarowe, co proces Wienera W. Wynika stąd, że (podkreśl prawidłowe odpowiedzi): X jest procesem Markowa, X jest martyngałem względem $\mathcal{F}^X_{\leqslant t}$, istnieje proces Wienera będący modyfikacją X, $\lim_{t\to\infty} X_t/t = 0$ p.n..

5. (3pkt) Niech A będzie generatorem półgrupy dla procesu Wienera W. Czy funkcja $f(t) = e^{-t^2/2}$ należy do $D(A)$? Jeśli tak, to oblicz $Af =$

6. (3pkt) τ jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}^W_{\leqslant t}$ takim, że $\mathbf{P}(\tau < \infty) = 1$. Wynika stąd, że (podkreśl prawidłowe odpowiedzi): $\mathbf{E}W_\tau^2 \leqslant \mathbf{E}\tau$, $\mathbf{E}W_\tau^2 \geqslant \mathbf{E}\tau$, $\mathbf{E}W_{\tau\wedge 1} = 0$, $\mathbf{E}W_\tau = 0$.

7. (3pkt) Które z poniższych procesów są gaussowskie (podkreśl): W_tW_1, $(W_{4t}-W_t)I_{W_{2t}\neq W_{4t}}$, $(W_{4t} - W_t)I_{W_{4t}\geqslant W_t}$, $W_{4t} + \sin t$.

8. (3pkt) W zależności od $\alpha \in \mathbb{R}$ oblicz

$$\limsup_{t\to\infty} |t|^\alpha W_t =$$

9. (3pkt) Oblicz $\mathbf{P}(\inf_{0\leqslant t\leqslant 5} W_t \leqslant -3) =$

10. (5pkt) Oblicz
a) $\mathbf{P}(W_1 - 4W_3 + 5W_5 \leqslant 1) =$

b) $\mathbf{P}(N_7 = 5|\mathcal{F}^N_{\leqslant 5}) =$

c) $\mathbf{P}(N_4 - 1 \geqslant N_2 = N_1 + 1) =$

11. (2pkt) Podaj definicję progresywnej mierzalności procesu $(X_t)_{t\in[0,5]}$ o wartościach rzeczywistych.

12. (3pkt) Podaj warunki dostateczne dla tego, by rodzina Markowa $(X_t)_{t\geqslant 0}$ o wartościach rzeczywistych miała mocną własność Markowa względem filtracji $\mathcal{F}^X_{\leqslant t+}$.