EGZAMIN Z PROCESÓW STOCHASTYCZNYCH

29 maja 2000r.

1. (10p.) $(\xi_t)_{t\in T}$ jest procesem o przyrostach niezależnych. Udowodnij, że $f(t) = D^2(\xi_t)$ jest niemalejącą funkcją t.

2. (10p.) T_1, T_2, T_3 są momentami Markowa względem $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Które z następujących zmiennych są momentami Markowa: $T_1 + 1$, $T_1 - 1$, $T_1 + T_2$, $\max(T_1, T_2)$, $\max(\min(T_1, T_2), T_3)$?

3. (12p.) Przypuśćmy, że $(G_t)_{t\geq 0}$ jest procesem gaussowskim o niezależnych przyrostach. Rozpatrzmy następujące trzy procesy: $X_t = G_t + t^2$, $Y_t = t^2 G_t$, $Z_t = (G_t)^2$. Które z tych procesów są procesami gaussowskimi? Które mają niezależne przyrosty?

4. (10p.) $(N_t)_{t\geq 0}$ jest procesem Poissona z intensywnościa λ, α jest ustaloną liczbą rzeczywistą dodatnią, $\mathcal{F}_t = \sigma\{N_s : s \leq t\}$, Wyznacz $f(t)$ tak, by $\exp(\alpha N_t - f(t))$ było martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_t)$.

5. (10p.) W_t^1, W_t^2 są dwoma niezależnymi procesami Wienera. Dla jakich $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ proces $Z_t = \alpha W_t^1 + \beta W_t^2$ będzie procesem Wienera?

6. (10p.) Niech $E = \{1, 2\}$. Rozważmy funkcję $P(t, i, \{j\}) = a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$, gdzie macierz $A(t) = (a_{ij}(t))$ dana jest wzorem:

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{3+2e^{-5t}}{5}, & \frac{2-2e^{-5t}}{5} \\ \frac{3-3e^{-5t}}{5}, & \frac{2+3e^{-5t}}{5} \end{bmatrix}.$$

Udowodnij, że istnieje proces Markowa o przestrzeni stanów E, dla którego P jest funkcją przejścia. Wyznacz jego generator.

7. (15p.) Czy proces Ornsteina-Uhlenbecka ($G_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$) jest mocnym procesem Markowa?

8. (10p.) Na przestrzeni stanów $E = \{3, 7\}$ rozważmy jednorodny łańcuch Markowa o macierzy przejścia

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Wyznacz półgrupę operatorów, związanych z tym łańcuchem Markowa.

9*. (30p.) W_t jest jednowymiarowymruchem Browna, natomiast $M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} W_s$. Czy M_t jest procesem Markowa?
Czy (M_t, W_t), traktowany jako proces o wartościach w $\mathbf{R}^2$, jest procesem Markowa?
W przypadku odpowiedzi twierdzących wyznacz funkcję przejścia.