Imię i nazwisko:..

Egzamin poprawkowy z procesów stochastycznych
grupa I, 10 września 2002

Uwaga: W poniższych zadaniach $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ oznacza zawsze standardowy proces Wienera w $\mathbb{R}$, a $N = (N_t)_{t\geqslant 0}$ proces Poissona z intensywnością λ.

Część zadaniowa

Pełne rozwiązania poniższych 3 zadań należy napisać na osobnych kartkach.

1. Proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ ma przyrosty niezależne, przy czym $\mathbf{E}X_t = 0$, $\mathrm{Var}(X_t) = t^2$. Oblicz $\mathrm{Cov}(X_t, X_s)$. Czy istnieje funkcja $f(t)$ taka, że $(X_t^2 + f(t))_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}^X_{\leqslant t}$?

2. Czy $(t^2 W_t)$ jest procesem Markowa? Jeśli tak to znajdź funkcję przejścia dla tego procesu.

3. $(X_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ jest procesem gaussowskim o średniej 0 takim, że dla wszystkich $s, t \in [0, 1]$ zachodzi
$$\mathrm{Var}(X_t - X_s) \leqslant 2\sqrt{|t-s|}.$$
Wykaż, że $(X_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ ma modyfikację o ciągłych trajektoriach.

Część Testowa

1. Które z poniższych procesów są gaussowskie (podkreśl właściwe odpowiedzi)?
W_{3t}; $|W_t|$; $t^2 W_{5t} + t$; N_t; $W_t W_1$.

2. τ i σ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$. Które z następujących zmiennych losowych muszą być momentami zatrzymania względem tej filtracji (podkreśl)?
$2\tau \wedge \sigma$; τ^2; $\tau^2 + 1$ $(\tau - 1) \vee (\sigma + 1)$.

3. Napisz równanie Chapmana-Kołmogorowa dla jednorodnych macierzy przejścia (można przyjąć, że przestrzeń stanów to zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$).

   $p_{s+t}(x, y) =$

4. Dla $s > 0$ oblicz $\mathbf{P}(\sup_{0\leqslant t\leqslant s} W_t \leqslant 1) =$

5. Jaki rozkład ma zmienna $2W_1 + 3W_2 - 3W_3$?

6. Dla $0 < t < s$ oblicz $\mathbf{E}(e^{2N_s} | \mathcal{F}^N_{\leqslant t}) =$

7. Które z następujących procesów są martyngałami względem filtracji $(\mathcal{F}^W_{\leqslant t})_{t\geqslant 0}$ (podkreśl)?
$|W_t|$; $W_t + 1$; $W_t + W_1$; $2W_t^2 + 3W_t - 2t$.

8. $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Markowa z funkcją przejścia $P_{s,t}(\cdot,\cdot)$ takim, że $\mathbf{P}(X_0 = x) = 1$. Dla $0 < s < t$ oblicz

   $\mathbf{P}(X_s < X_t) =.$

9. Niech $(M_t)_{t\geqslant 0}$ będzie nieujemnym prawostronnie ciągłym martyngałem. Wynika stąd, że (podkreśl właściwe odpowiedzi):
   M_t jest zbieżny prawie na pewno przy $t \to \infty$; M_t jest zbieżny w L^1 przy $t \to \infty$; $\mathbf{E}\sup_{t\geqslant 0}|M_t| < \infty$; $\sup_{t\geqslant 0}\mathbf{E}|M_t| < \infty$.

10. Oblicz $\mathbf{P}(N_1 \leqslant N_3) =$............................. oraz $\mathbf{P}(N_1 < N_3) =$............................. .

11. Podkreśl pary zmiennych losowych niezależnych:
    $\{W_2, W_3 - W_2\}$; $\{W_3, W_3 - W_2\}$; $\{W_1 + W_2, W_3 - W_2\}$.

12. Niech $(M_t)_{t\geqslant 0}$ będzie prawostronnie ciągłym martyngałem takim, że $\sup_{t\geqslant 0}\mathbf{E}M_t^2 < \infty$. Wynika stąd, że (podkreśl właściwe odpowiedzi):
    $\mathbf{E}\sup_{t\geqslant 0} M_t^2 < \infty$; $\mathbf{E}M_t = 0$; $(M_t)_{t\geqslant 0}$ jest jednostajnie całkowalny; $\mathbf{E}M_s^2 \leqslant \mathbf{E}M_t^2$ dla $s \leqslant t$.

13. $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem takim, że $\mathbf{P}(X_t \neq W_t) = 0$ dla wszystkich $t \geqslant 0$. Wynika stąd, że proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ (podkreśl właściwe odpowiedzi):
    jest procesem gaussowskim; ma ciągłe trajektorie; ma modyfikację ciągłą; ma przyrosty niezależne; jest procesem Markowa.

14. Podaj definicję funkcji przejścia $P_{s,t}(x, \Gamma)$.

15. Podaj definicję półgrupy operatorów kontrakcji na przestrzeni Banacha $(F, \|\cdot\|)$ oraz zdefiniuj generator (operator infinitezymalny) takiej półgrupy.

Imię i nazwisko:..

Egzamin poprawkowy z procesów stochastycznych
grupa II, 10 września 2002

Uwaga: W poniższych zadaniach $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ oznacza zawsze standardowy proces Wienera w $\mathbb{R}$, a $N = (N_t)_{t\geqslant 0}$ proces Poissona z intensywnością λ.

Część zadaniowa

Pełne rozwiązania poniższych 3 zadań należy napisać na osobnych kartkach.

1. Czy $((1+t)W_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Markowa? Jeśli tak to znajdź funkcję przejścia dla tego procesu.
2. $(X_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ jest procesem gaussowskim o średniej 0 takim, że dla wszystkich $s,t \in [0,1]$ zachodzi
$$\mathrm{Var}(X_t - X_s) \leqslant \sqrt[3]{|t-s|}.$$
Wykaż, że $(X_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ ma modyfikację o ciągłych trajektoriach.
3. Proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ ma przyrosty niezależne, przy czym $\mathbf{E}X_t = 0$, $\mathrm{Var}(X_t) = \sqrt{t+1}$. Oblicz $\mathrm{Cov}(X_t, X_s)$. Czy istnieje funkcja $f(t)$ taka, że $(X_t^2 + f(t))_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}^X_{\leqslant t}$?

Część Testowa

1. $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem takim, że $\mathbf{P}(X_t \neq W_t) = 0$ dla wszystkich $t \geqslant 0$. Wynika stąd, że proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ (podkreśl właściwe odpowiedzi):
jest procesem Markowa; jest procesem gaussowskim; ma ciągłe prawie wszystkie trajektorie; ma modyfikację ciągłą; ma przyrosty niezależne;
2. Jaki rozkład ma zmienna $4W_1 + 2W_2 - 2W_3$?
3. Które z poniższych procesów są gaussowskie (podkreśl właściwe odpowiedzi)?
$tW_{t^2} + W_1$; W_{3t}; W_t^3; N_t; W_tW_1.
4. τ i σ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$. Które z następujących zmiennych losowych muszą być momentami zatrzymania względem tej filtracji (podkreśl)?
$\tau \vee (\sigma - 3)$; $\sqrt{\tau}$; $\sqrt{\tau} \wedge 1$ $3\tau \wedge (\sigma + 1)$.
5. Dla $s > 0$ oblicz $\mathbf{P}(\sup_{0\leqslant t\leqslant s} W_t \leqslant 5) =$
6. Dla $0 < t < s$ oblicz $\mathbf{E}(e^{-N_s} | \mathcal{F}^N_{\leqslant t}) =$
7. Napisz równanie Chapmana-Kołmogorowa dla jednorodnych macierzy przejścia (można przyjąć, że przestrzeń stanów to zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$).

   $p_{s+t}(k,l) =$

8. Które z następujących procesów są martyngałami względem filtracji $(\mathcal{F}^W_{\leqslant t})_{t\geqslant 0}$ (podkreśl)?
W_t+3; $|W_t|$; W_t+W_1; $5W_t^2+2W_t-5t$.

9. $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Markowa z funkcją przejścia $P_{s,t}(\cdot,\cdot)$ takim, że $\mathbf{P}(X_0=0)=1$. Dla $0<s<t$ oblicz

   $\mathbf{P}(X_s+1>X_t)=$.

10. Podaj definicję funkcji przejścia $P_{s,t}(x,\Gamma)$.

11. Niech $(M_t)_{t\geqslant 0}$ będzie nieujemnym prawostronnie ciągłym martyngałem. Wynika stąd, że (podkreśl właściwe odpowiedzi):
M_t jest zbieżny prawie na pewno przy $t\to\infty$; $\sup_{t\geqslant 0}\mathbf{E}|M_t|<\infty$; $\mathbf{E}\sup_{t\geqslant 0}|M_t|<\infty$; M_t jest zbieżny w L^1 przy $t\to\infty$.

12. Oblicz $\mathbf{P}(N_2\geqslant N_3)=$............................ oraz $\mathbf{P}(N_2>N_3)=$............................ .

13. Podkreśl pary zmiennych losowych niezależnych:
$\{W_4, W_4-W_3\}$; $\{W_3, W_4-W_3\}$; $\{W_2+W_3, W_4-W_3\}$.

14. Niech $(M_t)_{t\geqslant 0}$ będzie prawostronnie ciągłym martyngałem takim, że $\sup_{t\geqslant 0}\mathbf{E}M_t^2<\infty$. Wynika stąd, że (podkreśl właściwe odpowiedzi):
$\mathbf{E}\sup_{t\geqslant 0}M_t^2<\infty$; $(M_t)_{t\geqslant 0}$ jest zbieżny w L^1; $\mathbf{E}M_s^2\leqslant\mathbf{E}M_t^2$ dla $s\leqslant t$; $\mathbf{E}M_t=0$.

15. Podaj definicję półgrupy operatorów kontrakcji na przestrzeni Banacha $(F,\|\cdot\|)$ oraz zdefiniuj generator (operator infinitezymalny) takiej półgrupy.