Nierówności Prékopy-Leindlera i Brunna-Minkowskiego.
Klasyczna nierówność izoperymetryczna.

Przez λ_n oznaczamy n-wymiarową miarę Lebesgue'a.
Jeśli μ jest miarą na (X,d), to określamy dla dowolnego zbioru A miarę wewnętrzną A:

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(C) \colon C \subset A, C \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Uwaga. Miarę wewnętrzną μ_* wprowadzamy, by uniknąć problemów z mierzalnością sumy zbiorów borelowskich. Daje się jednak pokazać, że suma zbiorów borelowskich w $\mathbb{R}^n$, choć nie musi być borelowska, to jest mierzalna w sensie Lebesgue'a. Warto też zauważyć, że suma zbiorów zwartych jest zwarta.

1. Wykaż, że dla dowolnych niepustych zbiorów borelowskich $A, B \subset \mathbb{R}$,

$$\lambda_{1,*}(A+B) \geqslant \lambda_1(A) + \lambda_1(B)$$

2. **Nierówność Prékopy-Leindlera**.
Wykaż, że jeśli $s \in [0,1]$, f, g, h są nieujemnymi funkcjami mierzalnymi na $\mathbb{R}^n$ takimi, że

$$h(sx+(1-s)y) \geqslant f(x)^s g(y)^{1-s} \text{ dla } x, y \in \mathbb{R}^n$$

to

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx\right)^s \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx\right)^{1-s}.$$

Wskazówki:
i) Dla $n=1$ zauważ, że można zakładać, że $\sup_x f(x) = \sup_x g(x) = 1$ i wtedy $\int f(x)dx = \int_0^1 \lambda_1(\{f > t\})dt$, $\int g(x)dx = \int_0^1 \lambda_1(\{g > t\})dt$ oraz $\int h(x)dx \geqslant \int_0^1 \lambda_1(\{h > t\})dt$ i można stosować poprzednie zadanie.
ii) Krok indukcyjny. Ustalmy funkcje mierzalne f, g, h na $\mathbb{R}^{n+1}$ i dla $x, y \in \mathbb{R}$ rozpatrzmy funkcje $f_x(\cdot) = f(x,\cdot)$, $g_y(\cdot) = g(y,\cdot)$ i $h_{sx+(1-s)y}(\cdot) = f(sx+(1-s)y,\cdot)$ i wykorzystajmy dla nich założenie indukcyjne.

3. **Nierówność Brunna-Minkowskiego.**
i) Wykaż, że dla dowolnych niepustych zbiorów borelowskich $A, B \subset \mathbb{R}^n$ i $s \in [0,1]$

$$\lambda_{n,*}(sA+(1-s)B) \geqslant \lambda_n(A)^s \lambda_n(B)^{1-s}.$$

ii) Wykaż, że dla dowolnych niepustych zbiorów borelowskich $A, B \subset \mathbb{R}^n$

$$\lambda_{n,*}(A+B)^{1/n} \geqslant \lambda_n(A)^{1/n} + \lambda_n(B)^{1/n}.$$

4. **Klasyczna izoperymetria.**
Wykaż, że jeśli A jest zbiorem borelowskim w $\mathbb{R}^n$ takim, że $\lambda_n(A) = \lambda_n(B(x,r))$, to
i) Dla wszystkich $t > 0$, $\lambda_n(A_t) \geqslant \lambda_n((B(x,r))_t) = \lambda_n(B(x,r+t))$.
ii) $\lambda_n^+(A) \geqslant \lambda_n^+(B(x,r)) = \lambda_{n-1}(\partial B(x,r))$.

Izoperymetria sferyczna.

Przez σ_n oznaczamy unormowaną miarę powierzchniową na S^n.

1. **Symetryzacja dwupuktowa.**
Niech x_0 będzie ustalonym punktem S^n a H podprzestrzenią w $\mathbb{R}^{n+1}$ wymiaru n, nie przechodzącą przez x_0. Wówczas $\mathbb{R}^{n+1} \setminus H$ jest sumą dwóch otwartych półprzestrzeni H_+ zawierającej x_0 i H_- nie zawierającej x_0. Niech $i = i_H : S^n \to S^n$ będzie odbiciem względem H. Określmy dla mierzalnej, ograniczonej funkcji $f : S^n \to \mathbb{R}$
$$f^H(x) := \begin{cases} \max\{f(x), f(ix)\} & \text{dla } x \in H_+ \\ \min\{f(x), f(ix)\} & \text{dla } x \in H_- \\ f(x) & \text{dla } x \in H \end{cases}$$
Wykaż, że
i) f i f^H maja ten sam rozkład względem σ_n.
ii) Jeśli f jest Lipschitzowska ze stałą L, to f^H też jest Lipschitzowska ze stałą L.
iii) $\int_{S^n} d(x_0, x) f(x) d\sigma_n(x) \geqslant \int_{S^n} d(x_0, x) f^H(x) d\sigma_n(x)$ ponadto, jeśli f jest ciągła, to równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $f = f^H$.

2. Funkcję g na S^n nazywamy radialną (względem ustalonego punktu $x_0 \in S^n$, jeśli $d(x, x_0) \leqslant d(y, x_0)$ implikuje $g(x) \geqslant g(y)$. Jeśli $f : S^n \to \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną ograniczoną to jej radialną symetryzacją nazywamy funkcję radialną f^* taką, że $\mathrm{dist}_{\sigma_n}(f) = \mathrm{dist}_{\sigma_n}(f^*)$. Udowodnij, że
i) Funkcja f^* istnieje i jest jednoznacznie wyznaczona z dokładnością do zbioru miary zero.
ii) Funkcja ciągła g jest radialna wtedy i tylko wtedy gdy $g^H = g$ dla wszystkich H.

3. Ustalmy funkcję L-Lipschitzowską $f : S^n \to \mathbb{R}$ i niech
$$\mathcal{A} := \{g : S^n \to \mathbb{R} : \mathrm{dist}_{\sigma_n}(f) = \mathrm{dist}_{\sigma_n}(g), g\ L\text{-Lipschitzowska}\}.$$
Ponadto niech $m := \inf_{g \in \mathcal{A}} \int_{S^n} d(x_0, x) g(x) d\sigma_n(x)$. Udowodnij, że
i) Istnieje ciąg $(g_k) \subset \mathcal{A}$ jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji g taki, że $\int_{S^n} d(x_0, x) g_k(x) d\sigma_n(x) \to m$ przy $k \to \infty$ (skorzystać z twierdzenia Arzeli-Ascoli).
ii) $g \in \mathcal{A}$ oraz $m = \int_{S^n} d(x_0, x) g(x) d\sigma_n(x)$.
iii) $g = f^*$.

4. **Izoperymetria sferyczna.**
Wykaż, że jeśli A jest zbiorem borelowskim w S^n takim, że $\sigma_n(A) = \sigma_n(B(x_0, r))$, to
i) Dla wszystkich $t > 0$, $\sigma_n(A_t) \geqslant \sigma_n((B(x_0, r))_t) = \sigma_n(B(x_0, r + t))$.
ii) $\sigma_n^+(A) \geqslant \sigma_n^+(B(x, r))$. *Wskazówka.* Wykorzystaj fakt, że symetryzacja radialna funkcji $\max\{t - d(x, A), 0\}$ jest 1-Lipschitzowska.

5. Wykaż, że $\sigma_n(A) \geqslant \frac{1}{2}$ implikuje $1 - \sigma_n(A_t) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{8}} e^{-(n-1)t^2/2}$.

Koncentracja dla procesów i wektorów gaussowskich.

Proces stochastyczny $(X_t)_{t\in T}$ nazywamy *gaussowskim*, jeśli wszystkie jego skończenie wymiarowe rozkłady są gaussowskie. Poniżej rozważamy procesy indeksowane przez przeliczalne zbiory stanów, ogólniej można rozważać procesy ośrodkowe (czyli np. procesy o ciągłych trajektoriach indeksowane ośrodkową przestrzenią).

1. **Koncentracja procesów gaussowskich.** Załóżmy, że $(G_t)_{t\in T}$ jest procesem gaussowskim, indeksowanym przez przeliczalny zbiór indeksów T, takim, że $\mathbb{P}(\sup_{t\in T} G_t < \infty) = 1$. Określmy
$$M := \operatorname{Med} \sup_{t\in T} G_T, \quad \sigma := \sup_{t\in T} (\operatorname{Var}(G_t))^{1/2}.$$
Wykaż, że dla $u > 0$,
$$\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in T} G_t \geqslant M + u\Big) \leqslant 1 - \Phi\left(\frac{u}{\sigma}\right) \leqslant \frac{1}{2}\exp\Big(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\Big),$$
$$\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in T} G_t \leqslant M - u\Big) \leqslant 1 - \Phi(\frac{u}{\sigma}) \leqslant \frac{1}{2}\exp\Big(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\Big),$$
$$\mathbb{P}\Big(\Big|\sup_{t\in T} G_t - M\Big| \geqslant u\Big) \leqslant 2\Big(1 - \Phi\Big(\frac{u}{\sigma}\Big)\Big) \leqslant \exp\Big(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\Big).$$
Wskazówka: Rozpatrz najpierw przypadek, gdy T jest zbiorem skończonym i skorzystaj z izoperymetrii gaussowskiej.

2. Przy założeniach zadania 1 wykaż, że

   i) $\mathbb{E}\sup_{t\in T} G_t < \infty \quad \text{oraz} \quad \Big|\mathbb{E}\sup_{t\in T} G_t - M\Big| \leqslant \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}$,

   ii) $\operatorname{Var}\Big(\sup_{t\in T} G_t\Big) \leqslant \sup_{t\in T} \operatorname{Var}(G_t)$,

   iii) $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{u^2} \log \mathbb{P}\Big(\sup_{t\in T} G_t \geqslant u\Big) = -\frac{1}{2\sigma^2}$,

   iv) $\mathbb{E}\exp\Big(\alpha \sup_{t\in T} G_t^2\Big) < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha < \frac{1}{2\sigma^2}$.

Wektor losowy X o wartości w ośrodkowej przestrzeni Banacha F nazywamy gaussowskim, jeśli dla dowolnego funkcjonału $\varphi \in F^*$ zmienna $\varphi(X)$ ma jednowymiarowy rozkład gaussowski. Założenie o ośrodkowości F ma charakter techniczny, służy uniknięciu problemów z mierzalnością (w nieośrodkowej przestrzeni Banacha suma dwóch wektorów losowych nie musi być mierzalna). Alternatywnie można zakładać, że norma w F jest wybijana przez przeliczalny ciąg funkcjonałów o normie jeden.

3. (Koncentracja norm wektorów gaussowskich)
Załóżmy, że X jest wektorem gaussowskim w ośrodkowej przestrzeni Banacha. Wówczas dla

$u > 0$,

$$\mathbb{P}(\|X\| \geqslant \mathrm{Med}(\|X\|) + u) \leqslant 1 - \Phi\Big(\frac{u}{\sigma}\Big) \leqslant \frac{1}{2}\exp\Big(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\Big),$$
$$\mathbb{P}(\|X\| \leqslant \mathrm{Med}(\|X\|) - u) \leqslant 1 - \Phi\Big(\frac{u}{\sigma}\Big) \leqslant \frac{1}{2}\exp\Big(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\Big),$$
$$\mathbb{P}(|\|X\| - \mathrm{Med}(\|X\|)| \geqslant u) \leqslant 2\Big(1 - \Phi\Big(\frac{u}{\sigma}\Big)\Big) \leqslant \exp\Big(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\Big),$$

gdzie
$$\sigma := \big\{\mathrm{Var}(\varphi(X))^{1/2} \colon \varphi \in F^*, \|\varphi\| \leqslant 1\big\}.$$

4. Przy oznaczeniach poprzedniego zadania mamy
$$\Big|\mathrm{Med}(\|X\|) - \mathbb{E}\|X\|\Big| \leqslant \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}$$
oraz dla $p \geqslant 1$ zachodzi
$$(\mathbb{E}\|X\|^p)^{1/p} \leqslant \mathbb{E}(\|X\|) + C_1\sqrt{p}\sigma,$$
gdzie C_1 jest pewną stałą uniwersalną. Wywnioskuj stąd, że dla stałych uniwersalnych C_2, C_3,
$$(\mathbb{E}\|X\|^p)^{1/p} \geqslant \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} (\mathbb{E}|\varphi(X)|^p)^{1/p} \geqslant \frac{1}{C_2}\sqrt{p}\sigma.$$
oraz
$$(\mathbb{E}\|X\|^p)^{1/p} \leqslant \mathbb{E}\|X\| + C_3 \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} (\mathbb{E}|\varphi(X)|^p)^{1/p}.$$

Nierówności wykładnicze.

Dla zmiennej losowej X określamy logarytm transformaty Laplace'a wzorem

$$\Lambda_X(\lambda) := \ln(\mathbb{E}\exp(\lambda X)), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. **Nierówność Hoeffdinga.** Wykaż, że jeśli X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $a_i \leqslant X_i \leqslant b_i$ oraz $S = \sum_{i=1}^n X_i$, to

$$\mathbb{P}(S \geqslant \mathbb{E}S + t) \leqslant \exp(-\frac{t^2}{2D^2})$$

dla $D^2 = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2$.

2. Niech Y_i będą niezależnymi wektorami losowymi w pewnej ośrodkowej przestrzeni Banacha oraz $S = \sum_{i=1}^n Y_i$. Wykaż, że

$$\mathbb{P}(|\|S\| - \mathbb{E}\|S\|| \geqslant t) \leqslant 2\exp(-\frac{t^2}{8D^2})$$

dla $D^2 = \sum_{i=1}^n \|Y_i\|_\infty^2$.

3. **Nierówność Bernsteina.** Załóżmy, że X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o średniej zero, zaś $\sigma_i^2, M < \infty$ są takie, że

$$\mathbb{E}|X_i|^k \leqslant \frac{k!}{2}\sigma_i^2 M^{k-2} \qquad \text{dla } i \geqslant 1,\ k \geqslant 2. \tag{1}$$

Udowodnij, że

$$\Lambda_{\sum_{i=1}^n X_i}(\lambda) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2 \sum_{i=1}^n \sigma_i^2}{2(1 - M|\lambda|)}\right) \qquad \text{dla } M|\lambda| < 1$$

oraz wywnioskuj stąd, że dla $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geqslant t\right) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2Mt}\right),$$
$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i\right| \geqslant t\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2Mt}\right).$$

4. **Nierówność Bernsteina dla zmiennych ograniczonych.** Załóżmy, że X_i są ograniczonymi, niezależnymi zmiennymi losowymi o średniej zero. Wywnioskuj z poprzedniego zadania, że dla $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geqslant t\right) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2 + 2at/3}\right),$$

gdzie $\sigma^2 = \mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i^2$ oraz $a = \max_i \|X_i\|_\infty$.

5. Mówimy, że zmienna losowa X jest subwykładnicza, jeśli $\mathbb{E}e^{\lambda|X|} < \infty$ dla pewnego $\lambda > 0$. Wykaż, że dla zmiennych subwykładniczych

$$\|X\|_{\Psi_1} := \inf\{\lambda > 0\colon\ \mathbb{E}e^{|X|/\lambda} \leqslant 2\} < \infty$$

oraz jeśli X ma dodatkowo średnią zero, to

$$\Lambda_X(\lambda) \leqslant 4\|X\|_{\Psi_1}^2 \lambda^2 \quad \text{dla } \lambda \leqslant \frac{1}{2\|X\|_{\Psi_1}}.$$

6. **Nierówność Bernsteina dla zmiennych subwykładniczych.** Załóżmy, że X_i są niezależnymi subwykładniczymi zmiennymi losowymi o średniej zero. Wykaż, że dla $t > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geqslant t\right) &\leqslant \exp\left(-\min\left\{\frac{t^2}{16\sum_{i=1}^n \|X_i\|_{\Psi_1}^2}, \frac{t}{4\max_i \|X_i\|_{\Psi_1}}\right\}\right) \\ &\leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{16\sum_{i=1}^n \|X_i\|_{\Psi_1}^2 + 4t\max_i \|X_i\|_{\Psi_1}}\right).\end{aligned}$$

7. **Nierówność Bennetta.** Załóżmy, że X_i są ograniczonymi niezależnymi zmiennymi losowymi o średniej zero, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i^2$ oraz $a \geqslant \max_i \|X_i\|_\infty$. Wykaż, że dla $\lambda > 0$,

$$\Lambda_{\sum_{i=1}^n X_i}(\lambda) \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2}(e^{\lambda a} - \lambda a - 1)$$

oraz wywnioskuj stąd, że dla $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geqslant t\right) \leqslant \exp\left(-\frac{\sigma^2}{a^2} h\left(\frac{ta}{\sigma^2}\right)\right) \leqslant \exp\left(-\frac{t}{2a}\ln\left(1 + \frac{ta}{\sigma^2}\right)\right),$$

gdzie

$$h(x) := (1+x)\ln(1+x) - x.$$

8. **Martyngałowa wersja nierówności Bennetta.** Wykaż, że dla martyngału $(M_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^n$ spełniającego warunki

$$\max_k \|M_k - M_{k-1}\|_\infty \leqslant a \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^n \|\mathbb{E}((M_k - M_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1})\|_\infty \leqslant \sigma^2,$$

zachodzi nierówność

$$\mathbb{P}(M_n - M_0 \geqslant s) \leqslant \exp\left(-\frac{\sigma^2}{a^2} h\left(\frac{sa}{\sigma^2}\right)\right) \leqslant \exp\left(-\frac{s}{2a}\ln\left(1 + \frac{sa}{\sigma^2}\right)\right).$$

Miary logarytmicznie wklęsłe.

1. Miarę μ na $\mathbb{R}^n$ nazywamy *logarytmicznie wklęsłą* jeśli dla dowolnych dwu niepustych zbiorów zwartych A, B i $s \in [0,1]$,

$$\mu(AK + (1-s)B) \geqslant \mu(A)^s \mu(B)^{1-s}.$$

   Udowodnij, że
   i) jeśli K jest zbiorem zwartym wypukłym o niepustym wnętrzu to rozkład jednostajny na K jest logarytmicznie wklęsły,
   ii) jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ jest wypukła oraz miara μ ma gęstość $g = e^{-f}$, to μ jest logarytmicznie wklęsła,
   iii) jeśli miara logarytmicznie wklęsła μ ma ciągłą gęstość g, to g jest logarytmicznie wklęsła (tzn. jest postaci jak w punkcie ii)).

   Uwaga 1. Daje się wykazać znaczne wzmocnienie iii) - twierdzenie Borella mówi, że jeśli μ jest logarytmicznie wklęsła i nie jest skoncentrowana na podprzestrzeni afinicznej niższego wymiaru, to μ ma logarytmicznie wklęsłą gęstość.

2. Wykaż, że następujące miary są logarytmicznie wklęsłe:
   i)afiniczny obraz miary logarytmicznie wklęsłej,
   ii) produkt miar logarytmicznie wklęsłych,
   iii) splot miar logarytmicznie wklęsłych,
   iv) słaba granica miar logarytmicznie wklęsłych,
   v) rozkład gaussowski.

   Uwaga 2. Można wykazać, że miary probabilistyczne logarytmicznie wklęsłe to słabe granice rzutów rozkładów jednostajnych na ciałach wypukłych.

3. Udowodnij, że jeśli μ jest probabilistyczną miarą logarytmicznie wklęsłą oraz A jest zbiorem symetrycznym wypukłym takim, że $\mu(A) = a > 0$, to dla $r > 1$,

$$1 - \mu(rA) \leqslant a\Big(\frac{1-a}{a}\Big)^{(r+1)/2}.$$

4. Wykaż, że jeśli X ma rozkład logarytmicznie wklęsły a $\|\cdot\|$ jest dowolną normą na $\mathbb{R}^n$ to dla $p > 1$,

$$(\mathbb{E}\|X\|^p)^{1/p} \leqslant Cp\mathbb{E}\|X\|,$$

   gdzie C jest stałą absolutną.

5. Niech μ będzie symetryczną miarą logwklęsłą na $\mathbb{R}$ z gęstością $g(x)$ taką, że $\mathrm{Var}_\mu(x) = 1$. Wykaż, że
   i) istnieją stałe uniwersalne C_1 i C_2 takie, że $C_1^{-1} \leqslant g(0) \leqslant C_2$ (wsk. rozpatrzeć dodatkowo $x_0 = \inf\{x > 0\colon g(x) \leqslant g(0)/e\}$),
   ii) istnieje stała uniwersalna L taka, że μ jest L-lipschitzowskim obrazem symetrycznej miary wykładniczej ν.

6. Przeprowadź analogiczne rozumowanie dla miar logwklęsłych na prostej bez założenia symetrii.

7. Wykaż, że jeśli μ jest produktową miarą logwklęsłą, to μ spełania nierówność Poincaré ze stałą $LC^{\mathrm{lin}}_{\mathrm{Poin}}$, gdzie L jest stałą uniwersalną, a $C^{\mathrm{lin}}_{\mathrm{Poin}}$ to stała w nierówności Poincaré dla funkcji liniowych, tzn.
$$C^{\mathrm{lin}}_{\mathrm{Poin}} := \sup_{|u|=1} \mathrm{Var}_\mu(\langle u, x\rangle).$$
Uwaga. Otwarty problem (Hipoteza KLS) mówi, że tak jest dla dowolnych miar logwklęsłych.

Nierówności różniczkowe - uzupełnienia.

1. Wykaż, że dla funkcji Lipschitzowskich $f\colon\ X \to \mathbb{R}$,

$$\int_X |\nabla f| d\mu \geqslant \int_{\mathbb{R}} \mu^+(\{x\colon f(x) > r\}) dr$$

Wskazówka: Najpierw rozpatrzeć ograniczone f, co można zredukować do przypadku $f \geqslant 0$. Rozpatrując zbiory $A(r) = \{x\colon f(x) > r\}$ i funkcje $f_t(x) = \sup_{d(x,y)<t} f(y)$ wykaż, że $\{x\colon f_t(x) > r\} = A(r)_t$ oraz, że

$$\int_X \frac{f_t - f}{t} d\mu = \int_0^\infty \frac{\mu(A(r)_t) - \mu(A(r))}{t} dr$$

i przejdź z $t \to 0+$.

2. Wykaż, że nierówność Cheegera implikuje nierówność Poincaré ze stałą $4c^{-2}$.

3. Wykaż, że jeśli miara μ spełnia logarytmiczną nierówność Sobolewa ze stałą C, to spełnia nierówność Poincaré z tą samą stałą.

4. Znajdź optymalne stałe w nierównościach Poincaré i logarytmicznej Sobolewa dla miary gaussowskiej z macierzą kowariancji Σ i średnią a.

5. Wykaż, że symetryczny rozkład wykładniczy ν spełnia nierówność Cheegera ze stałą $c = 1$.

6. Niech μ będzie miarą na prostej, $F(t) = \mu(-\infty, t]$, zaś p będzie gęstością jej części absolutnie ciągłej. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:
i) μ spełnia nierówność Cheegera ze stałą $c > 0$,
ii) μ jest $\frac{1}{c}$-lipschitzowskim obrazem ν,
iii) $\operatorname{essinf} \frac{p(x)}{\min\{F(x), 1-F(x)\}} \geqslant c$.

7. Wykaż, że jeśli miary μ_i spełniają nierówność Bobkowa ze stałymi C_i, to miara $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ spełnia nierówność Bobkowa ze stałą $\max_i C_i$.

8. Wykaż, że następujące dwie własności miary μ są równoważne dla $c > 0$:
i) $\mu(A_t) \geqslant \Phi(\Phi^{-1}(\mu(A)) + ct)$ dla dowolnego zbioru borelowskiego A i $t > 0$,
ii) $\mu^+(A) \geqslant cI(\mu(A))$ dla dowolnego zbioru borelowskiego A.

9. Wykaż, że jeśli miara μ spełnia nierówność Bobkowa ze stałą C, to zachodzą równoważne warunki z poprzedniego zadania z $c = 1/C$.

10. Wykaż, że dla dowolnych liczb $a, b \in [0, 1]$,

$$I(\frac{a+b}{2}) \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{I^2(a) + \frac{(b-a)^2}{4}} + \frac{1}{2}\sqrt{I^2(b) + \frac{(b-a)^2}{4}}$$

i wywnioskuj stąd, że miara γ_n spełnia nierówność Bobkowa ze stałą 1.

11. Wykaż, że $I(t) \sim \sqrt{2}t\sqrt{\ln \frac{1}{t}}$ przy $t \to 0+$ i wywnioskuj stąd, że nierówność Bobkowa implikuje logarytmiczną nierówność Sobolewa.

Nierówności splotu infimum

1. Wykaż, że splot infimum funkcji mierzalnej i jednostajnie ciągłej jest jednostajnie ciągły.

2. Dla miary probabilistycznej μ na $\mathbb{R}^n$ określamy

$$\Lambda_\mu(t) = \ln M_\mu(t) = \ln \int e^{\langle t,x\rangle} d\mu(x)$$

oraz

$$\Lambda_\mu^*(t) = \mathcal{L}\Lambda_\mu(t) = \sup\{\langle s,t\rangle - \Lambda_\mu(s)\colon s \in \mathbb{R}^n\}.$$

(Ogólnie $\mathcal{L}f(t) = \sup_s(\langle s,t\rangle - f(s))$ nazywamy transformatą Legendre'a funkcji f). Wykaż, że jeśli (μ,φ) ma własność (τ), to $\mathcal{L}(t)\varphi \geqslant \Lambda_\mu(t) + \Lambda_\mu(-t)$. Jeśli dodatkowo φ jest wypukła, a μ jest symetryczna, to $\mathcal{L}\varphi \geqslant 2\Lambda_\mu$ oraz $\varphi(t) \leqslant 2\Lambda_\mu^*(t/2)$.

3. Udowodnij, że dla symetrycznego rozkładu wykładniczego na $\mathbb{R}$

$$\Lambda_\nu^*(t) = \sqrt{1+t^2} - 1 - \ln\left(\frac{\sqrt{1+t^2}+1}{2}\right) \leqslant \min\{t^2, |t|\}.$$

Zatem znaleziona na wykładzie funkcja kosztu dla miary ν jest optymalna w klasie funkcji wypukłych z dokładnością do stałej.

4. Wykaż, że para $(\gamma_n, \frac{1}{4}|x|^2)$ ma własność (τ) oraz, że $\varphi(x) = \frac{1}{4}|x|^2$ jest optymalną wypukłą funkcją kosztu.

   Wskazówka: Wykaż, że funkcje $F = e^{-|x|^2/2}$, $G = e^{-f-|x|^2/2}$, $H = e^{f\Box\varphi-|x|^2/2}$ spełniają $F((x+y)/2) \geqslant G(x)^{1/2}H(y)^{1/2}$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^n$.

5. Powiemy, że miara μ na $\mathbb{R}^n$ spełnia *wypukłą nierówność splotu infimum z funkcją kosztu* φ, jeśli

$$\int e^{f\Box\varphi} d\mu \int e^{-f} d\mu \leqslant 1$$

dla dowolnej wypukłej funkcji mierzalnej f na $\mathbb{R}^n$. Wykaż, że
i) wypukła nierówność splotu infimum się tensoryzuje tak jak zwykła nierówność splotu infimum
ii) jeśli μ spełnia wypukłą nierówność splotu infimum z funkcją kosztu φ, to dla dowolnego borelowskiego zbioru wypukłego A

$$1 - \mu(A + B_\varphi(t)) \leqslant \frac{1}{\mu(A)} e^{-t},$$

iii) jeśli nośnik μ ma średnicę nie większą niż Δ, to μ spełnia wypukłą nierówność splotu infimum z funkcją kosztu $\frac{x^2}{4\Delta^2}$,
iv) jeśli μ jest rozkładem jednostajnym na $\{a,b\}^n$ (lub ogólniej dowolnym rozkładem produktowym o nośniku w $[a,b]^n$), zaś A jest wypukłym podzbiorem $[a,b]^n$, to

$$\int \exp\left(\frac{1}{4(b-a)^2}\mathrm{dist}(x,A)^2\right) d\mu \leqslant \frac{1}{\mu(A)}.$$

Nierówności transportowe - uzupełnienia

W zadaniach poniżej zakładamy, że $\mathbb{X}$ jest przestrzenią polską.

1. Wykaż, że $W_p \leqslant W_q$ dla $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$.

2. Dla $p > 0$ i przestrzeni metrycznej $(\mathbb{X}, d)$ określamy

$$\mathcal{P}_p(\mathbb{X}) = \{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{X})\colon \quad \int d(x, x_0)^p d\mu < \infty\}.$$

   Wykaż, że definicja $\mathcal{P}_p(\mathbb{X})$ nie zależy od wyboru punktu $x_0 \in \mathbb{X}$ oraz W_p jest metryką na $\mathcal{P}_p(\mathbb{X})$.

3. Udowodnij, że funkcja $\nu \mapsto W_p(\nu, \mu)$ jest półciągła z dołu, tzn. jeśli ν_n zbiega słabo do ν, to

$$\liminf_{n\to\infty} W_p(\nu_n, \mu) \geqslant W_2(\nu, \mu).$$

4. Niech μ będzie miarą probabilistyczną na $\mathbb{X}$. Na $\mathbb{X}^n$ określmy l_p-metrykę wzorem $d_p(x, y) = (\sum_{k=1}^n d(x_k, y_k)^p)^{1/p}$. Wykaż, że funkcja $g_n(x_1, \ldots, x_n) := W_p(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \delta_{x_k}, \mu)$ jest $n^{-1/p}$-lipschitzowska na $(\mathbb{X}^n, d_p)$.

5. Udowodnij, że jeśli $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie μ, oraz $\mathbb{E}_\mu d(x, x_0)^{p+\varepsilon} < \infty$ dla pewnego $\varepsilon > 0$, to $\mathbb{E}W_p(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \delta_{X_k}, \mu)^p = 0$.

6. Niech $p \geqslant 1$, $\mu, \mu_n \in \mathcal{P}_p(\mathbb{X})$ oraz $x_0 \in \mathbb{X}$. Wykaż, że $W_p(\mu_n, \mu) \to 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu_n \to \mu$ słabo oraz $\mathbb{E}_{\mu_n} d(x, x_0)^p \to \mathbb{E}_\mu d(x, x_0)^p$.

7. Udowodnij mocne prawo wielkich liczb: jeśli $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie $\mu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{X})$, $p \geqslant 1$, to $W_p(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \delta_{X_k}, \mu) \to 0$ p.n.

8. Załóżmy, że $W_p(\nu|\mu) \leqslant (CH(\nu|\mu))^{1/r}$ dla dowolnego $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$. Niech $\mu_A(C) := \mu(C \cap A)/\mu(A)$. Wykaż, że dla zbiorów borelowskich $A, B \subset \mathbb{X}$ o mierze dodatniej.

$$\mathrm{dist}(A, B) \leqslant W_p(\mu_A, \mu_B) \leqslant (C\ln(1/\mu(A)))^{1/r} + (C\ln(1/\mu(B)))^{1/r}$$

   i wywnioskuj stąd szacowanie $1 - \mu(A_t)$, jeśli $\mu(A) = p \in (0, 1)$.

9. Udowodnij nierówność Pinskera: Dla miar probabilistycznych μ i ν na $\mathbb{X}$

$$\|\mu - \nu\|_{\mathrm{TV}} := 2\sup_A |\mu(A) - \nu(A)| \leqslant \sqrt{2H(\nu|\mu)}.$$

10. Niech μ_i będą rozkładami na $\mathbb{R}$ o dystrybuantach F_i. Wykaż, że

$$W_1(\mu_1, \mu_2) = \int_\infty^\infty |F_1(x) - F_2(x)|dx = \int_{-1}^1 |F_1^{-1}(t) - F_2^{-1}(t)|dt.$$

Zastosowania nierówności Talagranda

1. Załóżmy, że $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \cdots \mathbb{X}_n$, funkcja $F\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ spełnia warunek

$$\forall_{x\in\mathbb{X}} \exists_{a=a(x)\in S^{n-1}} \forall_{y\in X}\ F(x) \leqslant F(y) + \sum_{i=1}^n a_i I_{\{x_i \neq y_i\}}.$$

Wykaż, że wówczas dla dowolnej probabilistycznej miary produktowej μ na $\mathbb{X}$,

$$\mu(\{|F - \mathrm{Med}_\mu(F)| \geqslant t\}) \leqslant 4e^{-t^2/4} \text{ dla } t > 0.$$

2. Załóżmy, że zmienne X_i są niezależne oraz $u_i \leqslant X_i \leqslant v_i$ prawie na pewno. Niech T będzie ograniczonym podzbiorem $\mathbb{R}^n$,

$$Z := \sup_{t\in T} \sum_{i=1}^n t_i X_i, \qquad \text{oraz} \qquad \sigma^2 := \sup_{t\in T} \sum t_i^2 (v_i - u_i)^2.$$

Wykaż, że

$$\mathbb{P}(|Z - \mathrm{Med}(Z)| \geqslant t) \leqslant 4\exp\left(-\frac{t^2}{4\sigma^2}\right), \quad \mathbb{E}|Z - \mathrm{Med}(Z)| \leqslant 4\sqrt{\pi}\sigma, \quad \mathrm{Var}(Z) \leqslant 16\sigma^2.$$

3. (Nierówność Chinczyna-Kahane'a) Niech ε_i będą niezależnymi symetrycznymi zmiennymi takimi, że $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$, zaś $v_1, \ldots, v_n$ wektorami w pewnej przestrzeni unormowanej F. Wykaż, że dla $M = \mathrm{Med}(\|\sum_{i=1}^n v_i\varepsilon_i\|)$ i $t > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|\left\|\sum_{i=1}^n v_i\varepsilon_i\right\| - M\right| \geqslant t\right) \leqslant 4\exp\left(-\frac{t^2}{16\sigma^2}\right),$$

gdzie

$$\sigma^2 = \sup\left\{\sum_{i=1}^n \varphi^2(v_i)\colon \varphi \in F^*, \|\varphi\| \leqslant 1\right\} = \sup\left\{\mathrm{Var}\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^n v_i\varepsilon_i\right)\right) : \varphi \in F^*, \|\varphi\| \leqslant 1\right\}.$$

Wywnioskuj stąd, że istnieje stała $C < \infty$ taka, że dla dowolnego $p \geqslant 2$,

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n v_i\varepsilon_i\right\|^p\right)^{1/p} \leqslant M + C\sqrt{p}\sigma \leqslant (C+1)\sqrt{p}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n v_i\varepsilon_i\right\|^2\right)^{1/2}.$$

4. Niech $X = (X_{ij})_{i,j\leqslant n}$ będzie symetryczną macierzą losową taką, że $(X_{ij})_{i\leqslant j}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi i $\mathbb{P}(X_{ij} = \pm 1) = 1/2$. Oznaczmy przez $\lambda_{\max}(X)$ największą wartość własną X. Udowodnij, że
i) $\mathrm{Med}(\lambda_{\max}(X)) \geqslant \sqrt{n}$,
ii) $\mathbb{P}(|\lambda_{\max}(X) - \mathrm{Med}(\lambda_{\max}(X))| \geqslant t) \leqslant 4e^{-t^2/32}$.

5. Niech $\mathbb{X} = \{0,1\}^n$ oraz $\mu = \mu_p^n$, gdzie $\mu_p = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$. Załóżmy, że zbiór $A \subset \{0,1\}^n$ jest *monotonicznie dziedziczny*, tzn. jeśli $x \in A$ to $y \in A$ dla wszystkich $x \leqslant y$. Wykaż, że

$$d_H(x,A) \leqslant \mathcal{D}_A^c(x)\sqrt{N(x)}, \qquad \text{gdzie } N(x) := \#\{1 \leqslant i \leqslant n \colon x_i = 1\},$$

zaś d_H oznacza metrykę Hamminga. Wywnioskuj stąd, że dla $s > 0$

$$\mu_p^n(\{d_H(x,A) \geqslant r\}) \leqslant \frac{1}{\mu_p^n(A)} e^{-\frac{r^2}{4s}} + \mu_p^n(\{N(x) > s\}).$$

6. W sposób losowy umieszczono m kul w n szufladkach (bez ograniczenia na liczbę kul w szufladzce). Niech Z oznacza liczbę zajętych szufladek. Wykaż, że
i) $\mathbb{E}Z = n(1-(1-\frac{1}{n})^m)$,
ii) $\mathbb{P}(|Z - \mathrm{Med}(Z)| \geqslant t) \leqslant 4\exp(-\frac{t^2}{4\min\{n,m\}})$.

Całkowanie przez części dla wektorów gaussowskich

1. Niech $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ oraz $|f(x)| + |f'(x)| \leqslant Ce^{t|x|^2}$ dla pewnego $t < 1/2$. Wykaż, że
$$\mathbb{E}gf(g) = \mathbb{E}f'(g) \qquad \text{dla } g \sim \mathcal{N}(0,1).$$

2. Niech $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ oraz dla $\varepsilon > 0$ istnieje $C_\varepsilon < \infty$ taki, że $|f(x)| + |\nabla f(x)| \leqslant C_\varepsilon e^{\varepsilon |x|^2}$. Udowodnij, że dla dowolnego n-wymiarowego wektora gaussowskiego X o średniej 0,
$$\mathbb{E}(X_i f(X)) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)\mathbb{E}\frac{\partial f}{\partial x_j}(X) \qquad \text{dla } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

3. Załóżmy, że X i Y są niezależnymi n-wymiarowymi wektorami gaussowskimi o średniej zero oraz
$$Z(t) = \sqrt{t}X + \sqrt{1-t}Y \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$
Wykaż, że dla $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ takiej, że dla $\varepsilon > 0$ istnieje $C_\varepsilon < \infty$, $f(x) + |\nabla f(x)| + |\mathrm{Hess} f(x)| \leqslant C_\varepsilon e^{\varepsilon |x|^2}$ zachodzi
$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}f(Z(t)) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (\mathrm{Cov}(X_i, X_j) - \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j))\mathbb{E}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Z(t)) \quad \text{dla } t \in (0,1).$$

Suprema procesów stochastycznych I

1. Wykaż, że jeśli proces $(X_t)_{t\in T}$ jest symetryczny (tzn. ma ten sam rozkład co $(-X_t)_{t\in T}$), to
$$\mathbb{E}\sup_{t,s\in T}(X_t - X_s) = 2\mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t$$
oraz dla dowolnego $t_0 \in T$
$$\mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t \leqslant \mathbb{E}\sup_{t\in T}|X_t| \leqslant \mathbb{E}|X_{t_0}| + 2\mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t$$

2. Wykaż, że dla dowolnego procesu stochastycznego $(X_t)_{t\in T}$ i $t_0 \in T$
$$\mathbb{E}\sup_{t\in T}|X_t| \leqslant \mathbb{E}|X_{t_0}| + \mathbb{E}\sup_{t,s\in T}(X_s - X_t) \leqslant 3\mathbb{E}\sup_{t\in T}|X_t|$$
oraz
$$\mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t \leqslant \mathbb{E}X_{t_0} + \sup_{s,t\in T}(X_t - X_s) \leqslant 2\mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t + \mathbb{E}\sup_{t\in T}(-X_t).$$

3. Udowodnij, że dla $t > 0$,
$$\frac{t}{\sqrt{2\pi}(t^2+1)} e^{-t^2/2} \leqslant \mathbb{P}(g \geqslant t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}t} e^{-t^2/2}.$$

4. Wykaż, że
$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\log n} \leqslant \mathbb{E}\sup_{k\leqslant n} g_k \leqslant \sqrt{2\log n}, \qquad \mathbb{E}\sup_{k\leqslant n}|g_k| \leqslant \sqrt{2\log(2n)}$$
oraz
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}\max_{k\leqslant n} g_k}{\sqrt{2\log n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}\max_{k\leqslant n}|g_k|}{\sqrt{2\log n}} = 1.$$

5. Niech $X = (X_{ij})_{i\leqslant n, j\leqslant m}$ będzie macierzą losową taką, że X_{ij} są niezależnymi zmiennymi $\mathcal{N}(0,1)$. Wykaż, że
$$c(\sqrt{n} + \sqrt{m}) \leqslant \mathbb{E}\|X\| \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{m}.$$
Wskazówka. Do oszacowania górnego użyj lematu Slepiana i procesu gaussowskiego $Z_{u,v} = \sum_{i=1}^n u_i g_i + \sum_{j=1}^m v_j g'_j$.

Suprema procesów stochastycznych II

1. Niech $T=\{1,2,\ldots\}$ oraz dla $n,m\in T$, $X_n=\frac{g_n}{\sqrt{\log(n+1)}}$ i $d(n,m)=\|X_n-X_m\|_2$. Wykaż, że

$$\mathbb{E}\sup_{n\in T} X_n<\infty \quad \text{oraz} \quad \int_0^\infty \sqrt{\log N(T,d,\varepsilon)}d\varepsilon=\infty.$$

Znajdź miarę probabilistyczną μ na T taką, że

$$\sup_{t\in T}\int_0^\infty \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(t,\varepsilon))}\right)}d\varepsilon<\infty.$$

2. Wykaż, że

$$\sup_{t\in T}\int_0^{\Delta(T)} \sqrt{\log\left(1+\frac{1}{\mu(B(t,\varepsilon))}\right)}d\varepsilon\leqslant 10\sup_{t\in T}\int_0^\infty \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(t,\varepsilon))}\right)}d\varepsilon.$$

3. Załóżmy, że φ jest funkcją Younga, a proces $(X_t)_{t\in T}$ spełnia warunek

$$\mathbb{E}\varphi\left(\frac{|X_t-X_s|}{d(t,s)}\right)\leqslant 1 \qquad \text{dla } t,s\in T,\ t\neq s.$$

oraz

$$\int_0^{\Delta(T)}\varphi^{-1}(N(T,d,\varepsilon))d\varepsilon<\infty.$$

Wykaż, że dla dowolnego $0<\eta,\eta'\leqslant\Delta(T)$,

$$\mathbb{E}\sup_{d(t,s)\leqslant\eta}(X_s-X_t)\leqslant \eta\varphi^{-1}(N(T,d,\eta')^2)+100\int_0^{\eta'}\varphi^{-1}(N(T,d,\varepsilon))d\varepsilon.$$

Wywnioskuj stąd, że dla każdego $\delta>0$ istnieje $\eta>0$ taka, że

$$\mathbb{E}\sup_{d(t,s)\leqslant\eta}(X_s-X_t)\leqslant\delta$$

oraz proces $(X_t)_{t\in T}$ ma z prawdopodobieństwem 1 ciągłe trajektorie.

4. Skonstruuj miarę probabilistyczną μ taką, że

$$\sup_{t\in T}\int_0^\infty \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(x,\varepsilon))}\right)}d\varepsilon\leqslant C\int_0^\infty \sqrt{\log(N(T,d,\varepsilon)}d\varepsilon.$$

Zmienne i procesy subgaussowskie.

1. Wykaż, że
$$\int_0^\infty \sqrt{\log N(T,d,\varepsilon)}d\varepsilon \sim \sum_{n=0}^\infty 2^{n/2}e_n(T).$$

2. Niech Z będzie zmienną losową. Wykaż, że następujace własności zmiennej Z są równoważne:
i) Ogony zmiennej Z spełniają
$$\mathbb{P}(|Z| \geqslant t) \leqslant 2\exp(-t^2/K_1^2) \quad \text{dla } t \geqslant 0.$$
ii) Momenty zmiennej Z spełniają
$$\|Z\|_p = (\mathbb{E}|Z|^p)^{1/p} \leqslant K_2\sqrt{p} \quad \text{dla } p \geqslant 1.$$
iii) Transformata Laplace'a Z^2 spełnia
$$\mathbb{E}\exp(\lambda^2 Z^2) \leqslant \exp(K_3^2\lambda^2) \quad \text{dla } |\lambda| \leqslant \frac{1}{K_3}.$$
iv) Zmienna Z ma skończoną normę Orlicza ψ_2 tzn.
$$\mathbb{E}\exp(Z^2/K_4^2) \leqslant 2.$$
Jeśli dodatkowo $\mathbb{E}Z = 0$ to warunki i)-iv) są równoważne
v) Transformata Laplace'a Z spełnia
$$\mathbb{E}\exp(\lambda Z) \leqslant \exp(K_5^2\lambda^2) \quad \text{dla } \lambda \in \mathbb{R}.$$
Ponadto optymalne stałe dla których zachodzą powyższe nierówności są porównywalne ze sobą z dokładnością do stałej uniwersalnej, tzn. $K_i \leqslant CK_j$ dla $i,j = 1,\ldots,5$.

3. Niech $(X_t)_{t\in T}$ będzie ośrodkowym procesem gaussowskim i $d(t,s) = \|X_t - X_s\|_2$ dla $s,t \in T$. Wykaż, że dla dowolnego ośrodkowego procesu subgaussowskiego $(Y_t)_{t\in T}$ względem metryki T tzn. takiego procesu, że $Y_t - Y_s$ spełnia jeden z poprzednich warunków z $K_i = d(t,s)$ zachodzi
$$\mathbb{E}\sup_{t,s\in T}(Y_t - Y_s) \leqslant C\mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t.$$

4. Niech $T \subset \mathbb{R}^n$ i $X_t = \sum_{i=1}^n t_i g_i$ dla $t \in T$, gdzie $g_1,\ldots,g_n$ niezależne o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$. Wykaż, że
i) dla dowolnego $s \in \mathbb{R}^n$ i ciągu (t_k) w $\mathbb{R}^n$ takiego, że $T \subset \overline{\mathrm{conv}}\{t_k\colon\ k \geqslant 1\}$ zachodzi
$$g(T) := \mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t \leqslant C\sup_{k\geqslant 1}|t_k - s|\sqrt{\log(k+1)}.$$
ii) jeśli $g(T) < \infty$ to istnieje $s \in \mathbb{R}^n$ i ciąg (t_k) w $\mathbb{R}^n$ taki, że
$$\sup_{k\geqslant 1}|t_k - s|\sqrt{\log(k+1)} \leqslant Cg(T).$$

Zmienne i macierze subgaussowskie

1. Niech $(X_t)_{t\in T}$ będzie ośrodkowym procesem stochastycznym, którego przyrosty mają wszystkie momenty skończone. Określmy

$$\Delta_n(A) := \sup\{\|X_t - X_s\|_{2^n} :\ t, s \in A\}, \quad A \subset T, n = 0, 1, \ldots.$$

Określmy

$$\gamma_X(T) := \inf_{\mathcal{A}} \sup_{t\in T} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n(A_n(t)),$$

gdzie infimum jest brane po wszystkich dopuszczalnych ciągach podziałów $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_n)_{n\geqslant 0}$ zbioru T.

i) Udowodnij, że

$$\mathbb{E} \sup_{t,s\in T} (X_t - X_s) \leqslant C\gamma_X(T).$$

ii) Uogólnij powyższą nierówność na szacowanie p-tych momentów supremum dla $p \geqslant 1$:

$$\left\| \sup_{t,s\in T} |X_s - X_t| \right\|_p \leqslant C(\gamma_X(T) + \sup_{t,s\in T} \|X_s - X_t\|_p).$$

iii) Wykaż, żeeśli X jest scentrowanym procesem gaussowskim, to $\gamma_2(T) \sim \gamma_X(T)$, jeśli jest to proces subgaussowski, to $\gamma_2(T) \leqslant C\gamma_X(T)$.

2. Niech $(X_t)_{t\in T}$ będzie ośrodkowym procesem subgaussowskim względem metryki d. Wykaż, że

$$\mathbb{P}(\sup |X_t - X_s| \geqslant C(\gamma_2(T, d) + u\mathrm{diam}(T, d))) \leqslant \exp(-u^2) \quad \text{dla } u > 0.$$

3. Wykaż, że $\|XY\|_{\psi_1} \leqslant \|X\|_{\psi_2}\|Y\|_{\psi_2}$.

4. (Lemat Johnsona-Lindenstraussa) Niech A będzie macierzą $m \times n$ losową o niezależnych izotropowych, subgaussowskich wierszach oraz $K = \max_i \|A_i\|_{\psi_2}$. Udowodnij, że

i) sla $T \subset \mathbb{R}^n$ z prawdopodobieństwem 0.99 zachodzi zdarzenie

$$|t - s| - \delta \leqslant \left| \frac{1}{\sqrt{m}} At - \frac{1}{\sqrt{m}} As \right| \leqslant |t - s| + \delta \quad \text{dla wszystkich } s, t \in T,$$

gdzie $\delta \leqslant \frac{C}{\sqrt{m}} K^2 g(T)$;

ii) dla T skończonego podzbioru $\mathbb{R}^n$ z prawdopodobieństwem 0.99 zachodzi zdarzenie

$$(1 - \varepsilon)|t - s| \leqslant \left| \frac{1}{\sqrt{m}} At - \frac{1}{\sqrt{m}} As \right| \leqslant (1 + \varepsilon)|t - s|,$$

gdzie $\varepsilon \leqslant C\sqrt{\frac{\log |T|}{m}} K^2$.

5. Niech A i K będą jak w poprzednim zadaniu. Wykaż, że

i) dla $T \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{E}\mathrm{diam}(T \cap \mathrm{Ker}A) \leqslant \frac{C}{\sqrt{m}} K^2 g(T);$$

ii) dla $T \subset S^{n-1}$ oraz $m \geqslant CK^4\gamma(T)^2$,

$$\mathbb{P}(T \cap \ker(A) = \emptyset) \geqslant 1 - \exp(-cm/K^4).$$

Oszczędne próbkowanie

1. Niech
$$\Sigma_p := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\|_0 \leqslant p\}.$$
Wykaż, że dla $1 \leqslant p \leqslant n$ zachodzi
$$\frac{1}{2}(\sqrt{p}B_1^n \cap B_2^n) \subset \mathrm{conv}(\Sigma_p \cap B_2^n) \subset \sqrt{p}B_1^n \cap B_2^n.$$
oraz
$$g(\sqrt{p}B_1^n \cap B_2^n) \leqslant 2g(\Sigma_p \cap B_2^n) \leqslant 4\sqrt{p \log \frac{2n}{p}}.$$

2. (Algorytm Lasso). Niech $x \in \Sigma_p$, $y = Ax + w$, gdzie A jest macierzą losową o niezależnych izotropowych subgaussowskich rzędach i $K = \max_i \|A_i\|_{\psi_2}$. Niech $\hat{x}$ będzie rozwiązaniem problemu Lasso
$$\hat{x} = \mathrm{argmin}\{|Ax' - y| : \ \|x'\|_1 \leqslant R\} \tag{2}$$
z $R = \|x\|_1$ oraz $h = \hat{x} - x$. Wykaż, że dla $m \geqslant CK^4 p \log(en/p)$,
i) $\|h\|_1 \leqslant 2\sqrt{p}|h|$,
ii) $|Ah|^2 \leqslant 2\langle Ah, w\rangle$,
iii) $\mathbb{P}(|Ah|^2 \geqslant \frac{m}{4}|h|^2) \geqslant 1 - \exp(-p\log(en/p))$,
iv) $\|\langle At, w\rangle - \langle As, w\rangle\|_{\psi_2} \leqslant CK|w||t-s|$ dla $t, s \in \mathbb{R}^n$,
v) $\mathbb{P}(\langle Ah, w\rangle \leqslant CK|h||w|\sqrt{p\log(en/p)}) \geqslant 1 - \exp(-p\log(en/p))$.
vi) Wywnioskuj z powyższych szacowań, że
$$\mathbb{P}\left(|\hat{x} - x| \leqslant CK\frac{|w|\sqrt{p\log(en/p)}}{m}\right) \geqslant 1 - 2\exp(-p\log(en/p)).$$

Twierdzenie Dvoretzky'ego

Ciałem wypukłym nazywamy zwarty wypukły podzbiór $\mathbb{R}^n$ o niepustym wnętrzu.

1. Wykaż, że jeśli K jest symetrycznym ciałem wypukłym w $\mathbb{R}^n$ oraz $\varepsilon > 0$ to istnieje podprzestrzeń V wymiaru $c(\varepsilon)\log n$ oraz elipsoida $\mathcal{E}$ w V taka, że
$$\mathcal{E} \subset K \cap V \subset (1+\varepsilon)\mathcal{E}.$$

2. Wykaż, że każda n wymiarowa elipsoida ma $\lceil \frac{n}{2} \rceil$-wymiarowy przekrój, który jest kulą euklidesową.

3. Wykaż, że jeśli K jest symetrycznym ciałem wypukłym w $\mathbb{R}^n$ oraz $\varepsilon > 0$ to istnieje podprzestrzeń V wymiaru $c(\varepsilon)\log n$ oraz $\rho > 0$ takie, że
$$\rho B_V \subset K \cap V \subset (1+\varepsilon)\rho B_V,$$
gdzie $B_V = \{x \in V \colon |x| = 1\}$.

4. Wykaż, że jeśli ℓ_2^k się wkłada ze stałą A w ℓ_p^n oraz $p \geqslant 2$, to $k \leqslant CA^p n^{2/p}$..

5. Wykaż, że jeśli ℓ_2^k się wkłada ze stałą A w ℓ_∞^n, to $k \leqslant CA^2 \log n$.

6. Oszacuj z dokładnością do stałych uniwersalnych $d(\ell_p^n)$. Co można powiedzieć o wymiarze przekrojów kuli jednostkowej w ℓ_p^n, które są bliskie euklidesowym?

7. Mówimy, że przestrzeń unormowana $(E, \|\ \|)$ jest kotypu p ze stałą $C_p(E)$, jeśli dla dowolnych $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ zachodzi
$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\right\|^p\right)^{1/p} \geqslant \frac{1}{C_p(E)} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{1/p}.$$
Wykaż, że
i) przestrzeń kotypu p ma kotyp q dla $q \geqslant p$ i $C_q(E) \leqslant C_p(E)$,
ii) przestrzeń nie może mieć mniejszego kotypu niż 2,
iii) przestrzeń Hilberta ma kotyp 2,
iv) przestrzeń ℓ_p^n ma kotyp $\max\{2, p\}$ i $C_{\max\{2,p\}}(\ell_p^n) \leqslant C$,
v) dla $p \geqslant 2$, $d(E) \geqslant \frac{1}{CC_p^2(E)} n^{2/p}$.

8. Wykaż dualną wersję twierdzenia Dvoretzky'ego: dla dowolnego symetrycznego ciała wypukłego K istnieje rzut P na przestrzeń V wymiaru $k \geqslant c(\varepsilon)\log n$ oraz elipsoida $\mathcal{E}$ w V taka, że
$$\mathcal{E} \subset PK \subset (1+\varepsilon)\mathcal{E}.$$