Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 1

1. Wykaż, że dla dowolnego $t > 0$,
$$(t^{-1} - t^{-3})e^{-t^2/2} \leqslant \int_t^{\infty} e^{-s^2/2} ds \leqslant t^{-1} e^{-t^2/2}.$$
Wywnioskuj stąd, że jeśli X ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$, to
$$\mathbf{P}(X \geqslant t) = 1 - \Phi(t) = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi} t} e^{-t^2/2} \quad \text{przy } t \to \infty.$$

2. Wykaż, że funkcja $\Lambda_X = \log M_X$ jest wypukła.

3. Oblicz funkcję tworzącą momenty M_X dla zmiennych X o następujących rozkładach:
a) symetryczny dwupunktowy;
b) dwumianowy z parametrami n, p;
c) Poissona z parametrem λ;
d) Gaussowski $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$;
e) wykładniczy z parametrem λ;
f) jednostajny na $[a, b]$.

4. Oblicz Λ_X^* dla rozkładów z zadania 1.

5. Wykaż, że jeśli $\mathbf{E}|X| < \infty$, to $\Lambda_X^*(\mathbf{E}X) = 0$ oraz, że dla dowolnej zmiennej losowej X, $\inf_t \Lambda_X^*(t) = 0$,

6. Udowodnij, że jeśli $\mathbf{P}(X > a) = 0$, to $\Lambda_X^*(t) = 0$ dla $t > a$ oraz oraz jeśli $\mathbf{P}(X < a) = 0$, to $\Lambda_X^*(t) = 0$ dla $t < a$. Ile wynosi w tych przypadkach $\Lambda_X^*(a)$?

7. Rozpatrując rozkłady wykładnicze, gaussowskie i Poissona pokaż, że nie można poprawić rzędu oszacowań w nierównościach Bernsteina i Bennetta.

8. (Nierówność Azumy) Załóżmy, że $(M_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^{\infty}$ jest martyngałem takim, że $\|M_k - M_{k-1}\|_\infty \leqslant a_k$ dla $k = 1, 2, \ldots$. Wykaż, że
$$\Lambda_{M_n - M_0}(s) \leqslant \frac{s^2}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \quad s \in \mathbb{R}$$
oraz
$$\mathbf{P}(|M_n - M_0| \geqslant t) \leqslant 2 \exp\Big(- \frac{t^2}{2 \sum_{k=1}^n a_k^2} \Big), \quad t \geqslant 0.$$

9. Przy oznaczeniach poprzedniego zadania, wykaż, że istnieje stała $C < \infty$ taka, że dla $p \geqslant 2$,
$$\|M_n - M_0\|_p := (\mathbf{E}|M_n - M_0|^p)^{1/p} \leqslant C \sqrt{p} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \Big)^{1/2}.$$

10. (Nierówności Chińczyna) Niech $S = \sum_{k=1}^n a_k\varepsilon_k$, gdzie ε_k niezależne zmienne losowe takie, że $\mathbf{P}(\varepsilon_k = \pm 1) = 1/2$.
i) Wykaż, że dla $p, q > 0$ istnieje stała $C_{p,q}$ zależna tylko od p i q dla której $\|S\|_p \leqslant C_{p,q}\|S\|_q$.
ii) Wykaż, że $C_{p,2} \leqslant C\sqrt{p}$ dla $p \geqslant 2$.
iii) Udowodnij, że dla $p > q$, $C_{p,q} \geqslant \gamma_p/\gamma_q$, gdzie $\gamma_p = (\mathbf{E}|\mathcal{N}(0,1)|^p)^{1/p} \sim \sqrt{p}$ przy $p \to \infty$. W szczególności $C_{p,2} \geqslant c\sqrt{p}$ dla $p \geqslant 2$ i stałej uniwersalnej c.

11. Załóżmy, że $(M_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^\infty$ jest martyngałem takim, że

$$\max_k \|M_k - M_{k-1}\|_\infty \leqslant a, \quad \|\mathbf{E}((M_k - M_{k-1})^2|\mathcal{F}_{k-1})\|_\infty \leqslant \sigma_k^2$$

oraz $\sigma^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$. Wykaż, że

$$\Lambda_{M_n - M_0}(s) \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2}(e^{sa} - sa - 1), \quad s \geqslant 0,$$

oraz

$$\mathbf{P}(|M_n - M_0| \geqslant t) \leqslant 2\exp\Big(-\frac{t}{2a}\ln\Big(1 + \frac{ta}{\sigma^2}\Big)\Big), \quad t \geqslant 0.$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 2

1. i) Załóżmy, że F jest ośrodkową przestrzenią metryczną. Wykaż, że $\mathcal{B}(F \times F) = \mathcal{B}(F) \otimes \mathcal{B}(F)$, gdzie $\mathcal{B}(X)$ oznacza rodzinę zbiorów borelowskich podzbiorów X.
   ii) Wywnioskuj stąd, że suma funkcji mierzalnych o wartościach w ośrodkowej przestrzeni unormowanej jest funkcją mierzalną.

2. Wykaż, że dla niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie
$$\mathbf{E} \max_{k \leqslant n} \|S_k\|^p \leqslant C^p \mathbf{E} \|S_n\|^p$$
dla $p \geqslant 1$ i stałej uniwersalnej C.

3. Wykaż, że dla niezależnych zmiennych losowych
$$\mathbf{E} \max_{k \leqslant n} \|S_k\|^p \leqslant C^p \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathbf{E} \|S_k\|^p$$
dla $p \geqslant 1$ i stałej uniwersalnej C.

4. Wykaż, że nie istnieje stała uniwersalna C taka, że
$$\mathbf{E} \max_{k \leqslant n} |M_k| \leqslant C \mathbf{E} |M_n|$$
dla dowolnego martyngału $(M_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$.

5. Udowodnij, że dla niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie oraz $a_i \in [0, 1]$,
$$\mathbf{P}\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right\| \geqslant 6t\right) \leqslant 4\mathbf{P}(\|S_n\| \geqslant t), \quad \text{dla } t > 0.$$

6. Udowodnij, że jeśli wektory losowe X_i mają średnią zero oraz $a_i \in [0, 1]$ to dla dowolnej funkcji wypukłej, niemalejącej $\varphi \colon \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ zachodzi
$$\mathbf{E}\varphi\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right\|\right) \leqslant \mathbf{E}\varphi\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} X_i\right\|\right).$$

7. Załóżmy, że $X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie. Udowodnij, że istnieją uniwersalne stałe C_1 i C_2 dla których
$$\mathbf{P}\left(\max_{k,l \leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} h(X_i, Y_j)\right| \geqslant t\right) \leqslant C_1 \mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h(X_i, Y_j)\right| \geqslant \frac{t}{C_2}\right)$$
dla dowolnej funkcji mierzalnej h.

8. Niech X_i będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych w ośrodkowej przestrzeni Banacha F. Wykaż, że następujące warunki są równoważne.
   i) $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ zbiega według prawdopodobieństwa.
   ii) $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ zbiega p.n..
   iii) $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ zbiega według rozkładu.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 3

1. Niech X będzie zmienną losową o wartościach w ośrodkowej przestrzeni Banacha F. Wykaż, że
   a) dla $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja $\varphi\colon F \to F$ przyjmująca tylko przeliczalnie wiele wartości taka, że $\|X - \varphi(X)\| \leqslant \varepsilon$ p.n.,
   b) jeśli $\mathbf{E}\|X\| < \infty$, to dla $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja $\varphi\colon F \to F$ przyjmująca tylko skończenie wiele wartości taka, że $\mathbf{E}\|X - \varphi(X)\| \leqslant \varepsilon$.

2. Załóżmy, że X_i są niezależne o wartościach w ośrodkowej przestrzeni unormowanej $(F, \|\ \|)$. Wykaż, że
   a) Dla dowolnych $s, t > 0$,
$$\mathbf{P}\left(\max_{k\leqslant n}\|S_k\| > 3t + s\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\max_{k\leqslant n}\|S_k\| > t\right)^2 + \mathbf{P}\left(\max_{k\leqslant n}\|X_k\| > s\right).$$
   b) Jeśli zmienne X_i są symetryczne, to dla $s, t > 0$,
$$\mathbf{P}\left(\max_{k\leqslant n}\|S_k\| > 2t + s\right) \leqslant 4\mathbf{P}(\|S_n\| > t)^2 + \mathbf{P}\left(\max_{k\leqslant n}\|X_k\| > s\right).$$

3. Niech $S := \sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i$ dla pewnych $x_i \in F$. Wykaż, że dla $p, q > 0$ istnieją stałe $C_{p,q} < \infty$ zależne tylko od p i q takie, że
$$(\mathbf{E}\|S\|^p)^{1/p} \leqslant C_{p,q}(\mathbf{E}\|S\|^q)^{1/q}.$$

4. Załóżmy, że $0 < p < \infty$, zmienne X_i są niezależne i symetryczne o wartościach w F. Wykaż, że
$$\mathbf{E}\|S_n\|^p \leqslant 2\cdot 3^p\mathbf{E}\max_{i\leqslant n}\|X_i\|^p + 2(3t_0)^p,$$
   gdzie
$$t_0 := \inf\{t > 0\colon \mathbf{P}(\|S_n\| > t) \leqslant (8\cdot 3^p)^{-1}\}.$$

5. Przestrzeń Banacha F nazywamy typu $p \geqslant 1$ jeśli istnieje stała T_p taka, że dla dowolnych wektorów $x_i \in F$,
$$\left(\mathbf{E}\left\|\sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i\right\|^p\right)^{1/p} \leqslant T_p\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{1/p}.$$
   Wykaż, że
   a) Jeśli przestrzeń jest typu p, to jest typu q dla $q \leqslant p$.
   b) Przestrzenie Hilberta są typu 2.
   c) Każda przestrzeń Banacha jest typu 1 i nie istnieją przestrzenie typu $p > 2$.
   d) Przestrzeń L^p jest typu $\min\{p, 2\}$ dla $p < \infty$.
   e) Przestrzeń c_0 nie ma nietrywialnego typu.

6. Wykaż, że ośrodkowa przestrzeń Banacha F ma typ p wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała $C < \infty$ taka, że dla dowolnych niezależnych zmiennych losowych Z_i o wartościach w F i średniej zero,
$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i=1}^n Z_i\right\|^p \leqslant C\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\|Z_i\|^p.$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 4

1. Wykaż, że Mocne Prawa Wielkich Liczb Marcinkiewicza-Zygmunda oraz Brunka zachodzą w przestrzeniach typu 2.

2. Wykaż odwrotną nierówność wykładniczą Kołmogorowa: Dla $\varepsilon > 0$ istnieją stałe $K(\varepsilon)$ i $\delta(\varepsilon)$ takie, że dla ograniczonych, niezależnych zmiennych losowych X_i o średniej zero, $s > 0$ oraz $\sigma^2 := \mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n X_i)$ zachodzi oszacowanie
$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geqslant t\right) \geqslant \exp\left(-(1+\varepsilon)\frac{t^2}{2\sigma^2}\right),$$
o ile
$$t \max_i \|X_i\|_\infty \leqslant \delta(\varepsilon)\sigma^2 \quad \text{oraz} \quad t \geqslant K(\varepsilon)\sigma.$$
Wsk: Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $u = u(\varepsilon)$ spełnia $1 - \Phi(u) \geqslant 2\exp(-\sqrt{1+\varepsilon}u^2/2)$. Wykazać, że jeśli
$$\max_{i\leqslant k} \|X_i\|_\infty \leqslant \gamma(\varepsilon)\left(\sum_{i=1}^k \mathbf{E}X_i^2\right)^{1/2},$$
to
$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^k X_i \geqslant u\left(\sum_{i=1}^k \mathbf{E}X_i^2\right)^{1/2}\right) \geqslant \frac{1}{2}(1-\Phi(u)) \geqslant \exp\left(-\sqrt{1+\varepsilon}\frac{u^2}{2}\right).$$

3. Udowodnij, że odwrotną nierówność wykładniczą Kołmogorowa można równoważnie sformułować jako istnienie stałych $\delta'(\varepsilon) > 0$ i $K'(\varepsilon) < \infty$ takich, że
$$\mathbf{P}\Big(\sum_{i=1}^n X_i \geqslant t\Big) \geqslant \frac{1}{K'(\varepsilon)}\exp\Big(-(1+\varepsilon)\frac{t^2}{2\sigma^2}\Big),$$
o ile
$$\max(t,\sigma)\max_i \|X\|_\infty \leqslant \delta'(\varepsilon)\sigma^2.$$

4. Wykaż, że jeśli X_i są niezależnymi wektorami losowymi o jednakowym rozkładzie takimi, że $\mathbf{P}(X_i \neq 0) > 0$, to $\limsup_{n\to\infty} \frac{\|S_n\|}{\sqrt{n}} = \infty$ p.n..

5. Podaj alternatywny dowód Prawa Iterowanego Logarytmu wykorzystując PIL dla procesu Wienera oraz twierdzenie Skorochoda o włożeniu:
Jeśli X jest zmienną losową o skończonej wariancji i średniej zero, to istnieje moment zatrzymania τ taki, że $\mathbf{E}\tau = \mathbf{E}X^2$ oraz W_τ ma taki sam rozkład jak X.

6. Załóżmy, że X_i są niezależnymi ograniczonymi zmiennymi losowymi o średniej zero spełniającymi warunki:
i) $a_n^2 := \mathrm{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}X_i^2 \to \infty$

ii) $\|X_n\|_\infty \frac{\sqrt{\ln\ln a_n^2}}{a_n} \to 0$.
Wykaż, że
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2a_n^2 \ln\ln a_n^2}} = 1 \quad \text{p.n.}$$

7. Załóżmy, że X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie ze średnią zero i wariancją σ^2. Wykaż, że dla dowolnej funkcji ciągłej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$\limsup_{n\to\infty} f\left(\frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}}\right) = \sup_{t\in[-\sigma,\sigma]} f(t) \quad \text{p.n.},$$
$$\liminf_{n\to\infty} f\left(\frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}}\right) = \inf_{t\in[-\sigma,\sigma]} f(t) \quad \text{p.n.}.$$

8. Załóżmy, że X_i są niezależnymi wektorami losowymi w ośrodkowej przestrzeni Banacha o tym samym rozkładzie co X. Wykaż, że warunek
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|S_n\|}{\sqrt{2n\ln\ln n}} < \infty \quad \text{p.n.}$$
implikuje:
i) $\mathbf{E}\frac{\|X\|^2}{LL\|X\|} < \infty$, gdzie $LLx := \ln\ln(x \vee 10)$.
ii) $\mathbf{E}X = 0$ oraz $\sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \mathbf{E}|x^*(X)|^2 < \infty$.

9. Załóżmy, że X_i są niezależnymi wektorami losowymi w ośrodkowej przestrzeni Banacha typu 2 o tym samym rozkładzie co X, $\mathbf{E}X = 0$ oraz $\mathbf{E}\frac{\|X\|^2}{LL\|X\|} < \infty$. Wykaż, że $\frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}}$ zbiega do 0 według prawdopodobieństwa.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 5

1. Udowodnij, że dla $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ oraz dowolnego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(\bar{S}_n \in A) = -\operatorname{essinf} \left\{ \frac{x^2}{2} \colon\ x \in A \right\}.$$

2. Podaj przykład zmiennej X dla której nie istnieje granica $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbf{P}(\bar{S}_n = 0)$.

3. Wykaż, że dla dowolnej zmiennej X,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(\bar{S}_n \geqslant t) = -\inf_{s \geqslant t} \Lambda_X^*(s).$$

4. Wykaż, że
a) Funkcja Λ_X^* jest półciągła z dołu dla dowolnej zmiennej X;
b) Jeśli $\Lambda_X(t) < \infty$ dla t z pewnego otoczenia zera, to $\lim_{|t|\to\infty} \Lambda_X^*(t) = \infty$, w szczególności zbiory $\{t \colon \Lambda_X^*(t) \leqslant a\}$ są zwarte dla $a \in \mathbb{R}$;
c) Jeśli $\Lambda_X(t) < \infty$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$, to $\lim_{|t|\to\infty} \Lambda_X^*(t)/|t| = \infty$.

5. Wykaż, że X ma skończoną funkcję tworzącą momenty na przedziale $(-t_0, t_0)$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $0 < \lambda < t_0$ istnieje stała $C(\lambda)$ taka, że $\mathbf{P}(|X| > t) \leqslant C(\lambda)e^{-\lambda t}$ dla wszystkich $t > 0$.

6. Załóżmy, że X ma skończoną funkcję tworzącą momenty na przedziale $(-t_0, t_0)$ dla pewnego $t_0 > 0$. Udowodnij, że
a) X ma wszystkie momenty skończone, tzn. $\mathbf{E}|X|^p < \infty$ dla $p > 0$;
b) $M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{E}X^k$;
c) $\mathbf{E}X^k = \frac{d^k}{dx^k} M_X(t)|_{t=0}$;
d) Jeśli Y zmienna losowa taka, że $M_Y(t) = M_X(t)$ dla t z pewnego otoczenia 0, to $\mu_Y = \mu_X$;
e) Rozkład X jest wyznaczony przez swoje momenty tzn. jeśli $\mathbf{E}Y^k = \mathbf{E}X^k$ dla wszystkich $k \in \mathbb{Z}_+$, to $\mu_Y = \mu_X$;
f) Jeśli X_n ciąg zmiennych losowych taki, że $M_{X_n}(t) \to M_X(t)$ dla $t \in (-t_0, t_0)$ przy $n \to \infty$, to X_n zbiega do X według rozkładu.

7. Podaj przykład dwu zmiennych losowych takich, że $\mathbf{E}X^k = \mathbf{E}Y^k$ dla wszystkich $k \in \mathbb{Z}_+$ (zakładamy, że $\mathbf{E}|X|^k, \mathbf{E}|Y|^k < \infty$) oraz $\mu_X \neq \mu_Y$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 6

Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$. *Transformatą Fenchela-Legendre'a* funkcji f nazywamy funkcję $\mathcal{L}f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ określoną wzorem

$$\mathcal{L}f(x) := \sup\{xy - f(y)\colon y \in \mathbb{R}\}.$$

Ogólniej, gdy $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, to definiujemy

$$\mathcal{L}f(x) := \sup\{\langle x, y\rangle - f(y)\colon y \in \mathbb{R}^d\}.$$

1. Wykaż, że:
   a) $\mathcal{L}(af)(x) = a\mathcal{L}f(x/a)$ dla $a > 0$;
   b) $f(x) + \mathcal{L}f(y) \geqslant xy$ dla $x, y \in \mathbb{R}$;
   c) $\mathcal{L}f$ jest funkcją wypukłą;
   d) $\mathcal{L}\mathcal{L}f \leqslant f$;
   e) $\mathcal{L}\mathcal{L}f = f$ jeśli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wypukła, a jeśli f przyjmuje wartość ∞, to równość zachodzi poza co najwyżej dwoma punktami;
   f) $\mathcal{L}\mathcal{L}f$ to maksymalna funkcja wypukła dominowana przez f.

2. Oblicz $\mathcal{L}f$ dla $f = |x|^p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

3. Wykaż, że jeśli X jest wektorem losowym oraz $M_X(t)$ jest skończone w pewnym otoczeniu punktu t_0, to M_X jest klasy C^∞ na tym otoczeniu. Oblicz pochodne $\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial t_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial t_d^{\alpha_d}} M_X(t_0)$.

4. Załóżmy, że współrzędne wektora $X^{(1)}, \ldots, X^{(d)}$ wektora X są niezależne. Wyraź Λ_X (odp. Λ_X^*) za pomocą $\Lambda_{X^{(j)}}$, $1 \leqslant j \leqslant d$ (odp. $\Lambda^*_{X^{(j)}}$).

5. Oblicz Λ_X i Λ_X^*, jeśli X jest wektorem gaussowskim ze średnią a i macierzą kowariancji C.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 7

1. Wykaż, że dla dowolnych miar probabilistycznych ν_1, ν_2, μ na przestrzeni $(E, \mathcal{E})$,
   i) $H(\theta\mu_1 + (1-\theta)\mu_2|\nu) \leqslant \theta H(\mu_1|\nu) + (1-\theta)H(\mu_2|\nu)$ dla $\theta \in [0,1]$,
   ii) jeśli $\theta \in (0,1)$ oraz $H(\theta\mu_1 + (1-\theta)\mu_2|\nu) = \theta H(\mu_1|\nu) + (1-\theta)H(\mu_2|\nu)$, to $\mu_1 = \mu_2$.

2. Oblicz
   i) $H(\mathrm{Bin}(n,p_1)|\mathrm{Bin}(n,p_2))$ dla $p_1, p_2 \in [0,1]$,
   ii) $H(\mathrm{Exp}(\lambda_1)|\mathrm{Exp}(\lambda_2))$ dla $\lambda_1, \Lambda_2 \in (0,\infty)$.

3. Ustalmy $\lambda, a > 0$. Wykaż, że $\mathrm{Exp}(1/a)$ jest jedynym minimizerem $H(\nu|\mathrm{Exp}(\lambda))$ wśród wszystkich miar probabilistycznych ν na $[0,\infty)$ o średniej a.

4. Udowodnij, że dla dowolnej miary probabilistycznej μ oraz ograniczonej z góry funkcji mierzalnej f na $(E, \mathcal{E})$,
$$\log \mathbf{E}_\mu e^f = \sup_\nu \{\mathbf{E}_\nu f - H(\nu|\mu)\}$$

5. Niech $\mathcal{A}$ będzie klasą funkcji na przestrzeni metrycznej (E,ρ), która zawiera wszystkie ograniczone funkcje Lipschitzowskie i jest zamknięta na jednostajnie ograniczoną zbieżność punktową (tzn. jeśli $f_n \in \mathcal{A}$ jest zbieżny punktowo do f i $\sup_n \sup_x |f_n(x)| < \infty$, to $f \in \mathcal{A}$. Wykaż, że $\mathcal{A}$ zawiera wszystkie ograniczone funkcje borelowskie na E.

6. Niech (E,ρ) jest przestrzenią polską.
   i) Wykaż, że istnieje ciąg $f_k \in C_{\mathrm{ogr}}$, $k = 1, 2, \ldots$ taki, że miary probabilistyczne μ_n zbiegają do miary probabilistycznej μ wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_E f_k \mathrm{d}\mu_n \to \int_E f_k \mathrm{d}\mu$ dla wszystkich k.
   ii) Jeśli $(f_k)_{k\geqslant 1}$ jest jak w i), to metryka
$$d(\mu,\nu) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \min\Big\{1, \Big|\int_E f_k \mathrm{d}(\mu-\nu)\Big|\Big\}$$
   metryzuje słabą zbieżność na $\mathcal{M}_1(E)$.

7. Załóżmy, że (E,ρ) jest przestrzenią polską. Wykaż, że wzór
$$d(\mu,\nu) := \inf\{\varepsilon > 0\colon\ \mu(F) \leqslant \nu(F_\varepsilon) + \varepsilon \text{ dla wszystkich zbiorów domkniętych } F\}$$
   określa metrykę na $\mathcal{M}_1(E)$ (metrykę tę nazywa się metryką Prochorowa) oraz zbieżność miar probabilistycznych w tej metryce jest równoważna zbieżności wg rozkładu.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 8

W zadaniach poniżej zmienne $X, X_1, \ldots$ mają taki sam rozkład o wartościach w $\mathbb{R}^d$ oraz $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Załóżmy, że $\mathcal{F}_n$ jest rosnącym ciągiem sigma ciał, $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_{n\geqslant 1} \mathcal{F}_n)$ oraz μ jest miarą probabilistyczną na $\mathcal{F}$. Udowodnij, że dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$ i $\varepsilon > 0$ istnieje n i $A_n \in \mathcal{F}_n$ takie, że $\mu(A \triangle A_n) \leqslant \varepsilon$.

2. Wykaż mocną własność Markowa dla (S_n), tzn., że dla każdego τ momentu zatrzymania względem filtracji generowanej przez (X_n), dowolnego $A \in \mathcal{F}_\tau$ oraz $B \in (\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))^\infty$,
$$\mathbf{P}(\{(S_{n+\tau} - S_\tau)_{n\geqslant 0} \in B\} \cap A \cap \{\tau < \infty\}) = \mathbf{P}(\{(S_n)_{n\geqslant 0} \in B)\mathbf{P}(A \cap \{\tau < \infty\}).$$

3. Wykaż, że jeśli błądzenie (S_n) jest powracające, to dla dowolnego $k = 1, 2, \ldots$ błądzenie (S_{nk}) jest powracające.

4. Wykaż, że jeśli $\mathbf{P}(X_1 = 0) < 1$, to $|S_n| \to \infty$ według prawdopodobieństwa.

5. Załóżmy, że $d = 1$, X jest symetryczny, niezdegenerowany oraz ograniczony. Wykaż, że $\limsup \pm S_n = \infty$ p.n. i wywnioskuj stąd, że S_n jest powracalny.

6. Wykaż, że zbiór A punktów osiągalnych przez błądzenie losowe jest równy najmniejszej domkniętej półgrupie zawierającej nośnik X. Podaj przykład pokazujący, że A nie musi być grupą.

7. Niech X będzie jednowymiarowym rozkładem p-stabilnym o funkcji charakterystycznej $e^{-|t|^p}$. Wykaż, że S_n jest powracający dla $p \geqslant 1$ i chwilowy dla $p < 1$.

8. Załóżmy, że $d = 2$ oraz współrzędne X są niezależnymi zmiennymi losowymi o funkcji charakterystycznej $e^{-|t|^p}$. Wykaż, że S_n jest powracalny dla $p = 2$ i chwilowy dla $p < 2$.

9. Niech (S'_n) oznacza niezależną kopię (S_n). Wykaż, że jeśli S_n jest powracające, to $S_n - S'_n$ jest powracające.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 9

1. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wykaż, że błądzenie (S_n) generowane przez zmienną o f.ch. φ jest powracalne, jeśli
$$\int_{|t|\leqslant\varepsilon} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-\varphi(t)}\right) \mathrm{d}t = \infty$$
oraz chwilowe, jeśli
$$\int_{|t|\leqslant\varepsilon} \frac{1}{1-\mathrm{Re}(\varphi(t))} \mathrm{d}t < \infty.$$

2. Załóżmy, że $\mu = c\mu_1 + (1-c)\mu_2$, gdzie $c \in (0,1)$, zaś μ_1 i μ_2 są symetrycznymi miarami probabilistycznymi na $\mathbb{R}^d$. Wykaż, że jeśli błądzenie losowe generowane przez μ jest powracalne, to powracalne są błądzenia losowe generowane przez μ_1 i μ_2. Czy implikacja w przeciwną stronę jest prawdziwa?

3. Załóżmy, że $X = Y + Z$, gdzie Y i Z są niezależnymi symetrycznymi wektorami losowymi w $\mathbb{R}^d$.
i) Wykaż, że jeśli błądzenie losowe generowane przez X jest powracalne, to również błądzenia losowe generowane przez Y i Z są powracalne.
ii) Pokaż przykład pokazujący, że implikacja przeciwna do i) jest fałszywa.

4. Wykaż, że dla dowolnego symetrycznego błądzenia losowego (S_n) i dowolnego momentu zatrzymania τ (względem filtracji generowanej przez (S_n)), ciąg (S_n) ma ten sam rozkład co ciąg $(\tilde{S}_n)$ dany wzorem
$$\tilde{S}_n := S_{n\wedge\tau} - (S_n - S_{n\wedge\tau}), \quad n \geqslant 0.$$

5. Niech (S_n) będzie klasycznym symetrycznym błądzeniem losowym na $\mathbb{Z}$ (czyli $\mathbf{P}(S_1 = \pm 1) = 1/2$). Określmy $V_n := \max\{k \leqslant n \colon\ S_{2k} = 0\}$. Oblicz $\mathbf{P}(V_n = k)$ dla $0 \leqslant k \leqslant 2n$.

6. Niech τ_n będzie n-tym wstępujący momentem drabinowym dla niezdegenerowanego błądzenia losowego (S_n). Wykaż, że
i) $\mathbf{P}(\tau_n < \infty) = \mathbf{P}(\tau_1 < \infty)^n$
ii) Jeśli $\tau_1 < \infty$ p.n., to (τ_n, S_{τ_n}) jest dwuwymiarowym błądzeniem losowym.

7. Niech τ_1 i σ_1 oznaczają odpowiednio pierwszy wstępujący i pierwszy zstępujący moment drabinowy dla niezdegenerowanego błądzenia losowego (S_n). Wykaż, że
i) $\limsup S_n = \infty$ p.n. wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma_1 < \infty$ p.n.
ii) $S_n \to \infty$ p.n. wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{E}\sigma_1 < \infty$
iii) i) i ii) zachodzą gdy σ_1 zastąpimy przez τ_1.

8. Przypomnijmy, że miara ze znakiem, to różnica dwóch miar skończonych. Wykaż, że jeśli μ i ν są miarami ze znakiem na $\mathbb{R}^d$ i
$$\int \exp(i\langle t,x\rangle) d\mu(x) = \int \exp(i\langle t,x\rangle) d\nu(x) \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}^d,$$
to $\mu = \nu$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 10

1. Załóżmy, że μ i ν są miarami (skończonymi lub ze znakiem) na $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ oraz
$$\int s^n e^{itx} d\mu(n,x) = \int s^n e^{itx} d\nu(n,x) \quad \text{dla } |s|<1, t \in \mathbb{R}.$$
Wykaż, że $\mu = \nu$.

2. Załóżmy, że μ i ν są miarami (skończonymi lub ze znakiem) na $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ oraz
$$\int s^n e^{-ux} d\mu(n,x) = \int s^n e^{-ux} d\nu(n,x) \quad \text{dla } |s|<1, u \geqslant 0.$$
Wykaż, że $\mu = \nu$.

3. Załóżmy, że μ jest lokalnie skończoną miarą na $\mathbb{R}_+$ niezmienniczą na przesunięcia, tzn. $\mu(B+t) = \mu(B)$ dla $t \geqslant 0$ i $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Wykaż, że $\mu = a\lambda$ dla pewnego $a \geqslant 0$.

4. Załóżmy, że $\nu, \nu_1, \nu_2, \ldots$ są miarami lokalnie skończonymi na $\mathbb{R}_+$. Wykaż, że $\nu_n \xrightarrow{v} \nu$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\nu_n([0,x]) \to \nu[0,x]$ dla każdego $x > 0$ takiego, że $\nu(\{x\}) = 0$. Jak wygląda analogiczny warunek dla miar na $\mathbb{R}$?

5. Wykaż, że dla miar probabilistycznych na $\mathbb{R}^d$ następujące warunki są równoważne:
i) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, tzn. $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$ dla $f \in C_{\mathrm{ogr}}(\mathbb{R}^d)$
ii) $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$, tzn. $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$ dla $f \in C_{\mathrm{zw}}(\mathbb{R}^d)$
iii) $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$ dla f ciągłych na $\mathbb{R}^d$ takich, że $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.
Pokaż, że dla miar subprobabilistycznych warunki ii) i iii) są równoważne, a dla miar lokalnie skończonych tylko warunek ii) jest prawidłowo sformułowany.

6. Mówimy, że rozkład μ na $\mathbb{R}$ jest niearytmetyczny, jeśli grupa generowana przez nośnik μ jest gęsta w $\mathbb{R}$, w przeciwnym przypadku μ nazywamy arytmetycznym. Wykaż, że μ jest arytmetyczny wtedy wtedy i tylko wtedy, gdy nośnik μ jest zawarty w $\delta\mathbb{Z}$ dla pewnego $\delta > 0$.

7. Załóżmy, że zmienne X i X' mają jednakowy rozkład. Wykaż, że jeśli rozkład X jest arytmetyczny, to rozkład $X - X'$ też jest arytmetyczny. Podaj przykład pokazujący, że przeciwna implikacja jest fałszywa.

8. Załóżmy, że μ jest rozkładem na $\mathbb{Z}_+$ o średniej $c \in (0,\infty)$ takim, że grupa generowana przez $\mathrm{supp}(\mu)$ jest równa $\mathbb{Z}$. Wykaż, że błądzenie losowe (S_n) po $\mathbb{Z}_+$ ma stacjonarny proces odnowienia (traktowany jako miara losowa na podzbiorach $\mathbb{Z}$) wtedy i tylko wtedy, gdy rozkład początkowy ν jest dany wzorem $\nu(\{n\}) = c^{-1}\mu(n,\infty)$, $n = 0, 1, 2 \ldots$.

9. Uogólnij poprzednie zadanie na przypadek, gdy μ jest rozkładem na $\mathbb{Z}$ o dodatniej, skończonej średniej.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 11

1. Udowodnij lemat z wykładu o zbieżności ν_t do $\tilde{\nu}$ w pełnej ogólności, tzn. gdy przyrosty błądzenia mają rozkład niearytmetyczny o skończonej średniej dodatniej.
W tym celu rozważmy zmienne niezależne $S_0, S_0', X_1, \varepsilon_1, X_2, \varepsilon_2, \ldots$ takie, że S_0 ma rozkład ν, S_0' rozkład $\tilde{\nu}$, zmienne X_k rozkład μ oraz $\mathbf{P}(\varepsilon_k = \pm 1) = 1/2$ oraz błądzenie losowe
$$\tilde{S}_n = S_0' - S_0 - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k X_k, \quad n = 0, 1, \ldots.$$
i) Wykaż, że z prawdopodobieństwem 1 ciąg $(\tilde{S}_n)$ jest gęsty w $\mathbb{R}$, w szczególności moment zatrzymania $\tau := \inf\{n\colon\ \tilde{S}_n \in [0, \varepsilon]\}$ jest skończony p.n.
ii) Niech $\varepsilon_k' := (-1)^{\mathbb{1}_{\{k \leqslant \tau\}}} \varepsilon_k$. Wykaż, że (ε_k') jest niezależnym od S_0, S_0' i X_k ciągiem niezależnych zmiennych losowych i $\mathbf{P}(\varepsilon_k' = \pm 1) = 1/2$.
iii) Niech $\kappa_1 < \kappa_2 < \ldots$ będą kolejnymi wartościami k dla których $\varepsilon_k = 1$, podobnie zdefiniujmy ciąg $\kappa_1' < \kappa_2' < \ldots$ poprzez zmienne ε_k'. Wówczas ciągi
$$S_n = S_0 + \sum_{j \leqslant n} X_{\kappa_j}, \quad S_n' = S_0' + \sum_{j \leqslant n} X_{\kappa_j'}$$
są błądzeniami losowymi o rozkładzie przyrostów μ i rozkładzie początkowym równym odpowiednio ν i $\tilde{\nu}$.
iv) Niech $\tau_\pm = \sum_{k \leqslant \tau} \mathbb{1}_{\{\varepsilon_k = 1\}}$, wówczas
$$S_{\tau_- + n}' - S_{\tau_+ + n} = \tilde{S}_\tau \in [0, \varepsilon].$$
v) Wywnioskuj stąd, że
$$\tilde{\nu}[\varepsilon, x] - \mathbf{P}(Z \geqslant t) \leqslant \nu_t[0, x] \leqslant \tilde{\nu}[0, x + \varepsilon] + \mathbf{P}(Z \geqslant t)$$
gdzie $Z := \max\{\max_{k \leqslant \tau_-} S_k', \max_{k \leqslant \tau_+} S_k\}$.
vi) Pokaż, że $\nu_t[0, x] \to \tilde{\nu}[0, x]$, czyli $\nu_t \xrightarrow{v} \nu$.

2. Wykaż, że funkcja o nośniku w $[0, x]$ jest bezposrednio całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowalna w sensie Riemanna na $[0, x]$.

3. Wykaż, że każda funkcja monotoniczna z $L_1(\mathbb{R}_+)$ jest bezposrednio całkowalna w sensie Riemanna.

4. Podaj przykład funkcji ciągłej z $L_1(\mathbb{R}_+)$, która nie jest bezpośrednio całkowalna w sensie Riemanna.

5. Rozważmy proces odnowy η dla błądzenia losowego startującego z zera o niearytmetycznym rozkładzie przyrostów μ na $\mathbb{R}_+$ ze średnią $c > 0$. Ustalmy $h > 0$ i określmy $F(t) = \mathbf{P}(\eta(t, t + h] = 0)$. Wykaż, że F spełnia równanie odnowienia $F = f + F * \mu$, gdzie $f(t) = \mu(t + h, \infty)$. Znajdź granicę $F(t)$ przy $t \to \infty$.