Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 1

Funkcją tworzącą momenty (transformatą Laplace'a) zmiennej losowej X nazywamy funkcję

$$M_X(t) := \mathbf{E}e^{tX}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Oblicz funkcję tworzącą momenty zmiennych o następujących rozkładach:
   a) symetryczny dwupunktowy;
   b) dwumianowy z parametrami n, p;
   c) Poissona z parametrem λ;
   d) Gaussowski $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$;
   e) wykładniczy z parametrem λ;
   f) jednostajny na $[a, b]$.

2. Udowodnij, że jeśli X i Y niezależne zmienne losowe, to $M_{X+Y} = M_X M_Y$.

3. Wykaż, że X ma skończoną funkcję tworzącą momenty na przedziale $(-t_0, t_0)$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $0 < \lambda < t_0$ istnieje stała $C(\lambda)$ taka, że $\mathbf{P}(|X| > t) \leqslant C(\lambda)e^{-\lambda t}$ dla wszystkich $t > 0$.

4. Załóżmy, że X ma skończoną funkcję tworzącą momenty na przedziale $(-t_0, t_0)$ dla pewnego $t_0 > 0$. Udowodnij, że
   a) X ma wszystkie momenty skończone, tzn. $\mathbf{E}|X|^p < \infty$ dla $p > 0$;
   b) $M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathbf{E}X^k$;
   c) $\mathbf{E}X^k = \frac{d^k}{dx^k} M_X(t)|_{t=0}$;
   d) Jeśli Y zmienna losowa taka, że $M_Y(t) = M_X(t)$ dla t z pewnego otoczenia 0, to $\mu_Y = \mu_X$;
   e) Rozkład X jest wyznaczony przez swoje momenty tzn. jeśli $\mathbf{E}Y^k = \mathbf{E}X^k$ dla wszystkich $k \in \mathbb{Z}_+$, to $\mu_Y = \mu_X$;
   f) Jeśli X_n ciąg zmiennych losowych taki, że $M_{X_n}(t) \to M_X(t)$ dla $t \in (-t_0, t_0)$ przy $n \to \infty$, to X_n zbiega do X według rozkładu.

5. Podaj przykład dwu zmiennych losowych takich, że $\mathbf{E}X^k = \mathbf{E}Y^k$ dla wszystkich $k \in \mathbb{Z}_+$ (zakładamy, że $\mathbf{E}|X|^k, \mathbf{E}|Y|^k < \infty$) oraz $\mu_X \neq \mu_Y$.

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. *Transformatą Fenchela-Legendre'a* funkcji f nazywamy funkcję $\mathcal{L}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ określoną wzorem

$$\mathcal{L}f(x) := \sup\{xy - f(y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Ogólniej, gdy $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, to definiujemy

$$\mathcal{L}f(x) := \sup\{\langle x, y\rangle - f(y) : y \in \mathbb{R}^d\}.$$

6. Wykaż, że:
   a) $\mathcal{L}(af)(x) = a\mathcal{L}f(x/a)$ dla $a > 0$;
   b) $f(x) + \mathcal{L}f(y) \geqslant xy$ dla $x, y \in \mathbb{R}$;
   c) $\mathcal{L}f$ jest funkcją wypukłą;

d) $\mathcal{L}\mathcal{L}f \leqslant f$;
e) $\mathcal{L}\mathcal{L}f = f$ jeśli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wypukła, a jeśli f przyjmuje wartość ∞, to równość zachodzi poza co najwyżej dwoma punktami;
f) $\mathcal{L}\mathcal{L}f$ to maksymalna funkcja wypukła dominowana przez f.

7. Oblicz $\mathcal{L}f$ dla $f = |x|^p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Dla zmiennej losowej X, określmy

$$\Lambda_X(t) := \log M_X(t), \quad \Lambda_X^*(t) := \mathcal{L}\Lambda_X(t).$$

8. Wykaż, że Λ_X jest funkcją wypukłą.

9. Załóżmy, że X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie, a $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Wyraź $\Lambda_{S_n}^*$ za pomocą Λ_X^*.

10. Oblicz Λ_X^* dla rozkładów z zadania 1.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 2

1. Wykaż, że dla dowolnego $t > 0$,

$$t^{-1} - t^{-3} < e^{t^2/2} \int_t^\infty e^{-s^2/2} ds < t^{-1}.$$

2. Uogólnij poprzednie zadanie i znajdź takie liczby $a_i > 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, że dla dowolnego $t > 0$ oraz $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\sum_{i=0}^{2k+1} (-1)^i a_i t^{-2i-1} < e^{t^2/2} \int_t^\infty e^{-s^2/2} ds < \sum_{i=0}^{2k} (-1)^i a_i t^{-2i-1}.$$

3. Udowodnij, że dla $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ oraz dowolnego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(\bar{S}_n \in A) = -\mathrm{essinf}\{x^2/2 \colon x \in A\}.$$

4. Podaj przykład zmiennej X takiej, że nie istnieje $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbf{P}(\bar{S}_n = 0)$.

5. Wykaż, że dla dowolnej zmiennej X,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(\bar{S}_n \geqslant t) = -\inf_{s \geqslant t} \Lambda_X^*(s).$$

6. Wykaż, że
a) Funkcja Λ_X^* jest półciągła z dołu dla dowolnej zmiennej X;
b) Jeśli $0 \in \mathrm{Int} D_{\Lambda_X}$, to $\lim_{|t|\to\infty} \Lambda_X^*(t) = \infty$, w szczególności zbiory $\{t \colon \Lambda_X^*(t) \leqslant a\}$ są zwarte dla $a \in \mathbb{R}$;
c) Jeśli $D_{\Lambda_X} = \mathbb{R}$, to $\lim_{|t|\to\infty} \Lambda_X^*(t)/|t| = \infty$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 3

1. Załóżmy, że współrzędne $X^{(j)}$ wektora losowego X są niezależnymi zmiennymi losowymi. Wyraź Λ_X i Λ_X^* za pomocą $\Lambda_{X^{(j)}}$ i $\Lambda^*_{X^{(j)}}$.

2. Niech X będzie gaussowskim d-wymiarowym wektorem losowym o średniej a i macierzy kowariancji C. Znajdź Λ_X i Λ_X^*.

3. a) Wykaż, że jeśli X jest wektorem losowym w $\mathbb{R}^d$ oraz $t \notin \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{supp}\ \mu_X)}$, to $\Lambda_X^*(t) = \infty$.
   b) Podaj przykład wektora losowego X oraz $t \notin \mathrm{supp}\ \mu_X$ takiego, że $\Lambda_X^*(t) < \infty$.

4. Załóżmy, że $(M_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^{\infty}$ jest martyngałem takim, że $\|M_k - M_{k-1}\|_\infty \leqslant a_k$ dla $k = 1, 2, \ldots$. Wykaż, że

$$\Lambda_{M_n - M_0}(t) \leqslant \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

   oraz

$$\mathbf{P}(|M_n - M_0| \geqslant s) \leqslant 2\exp(-\frac{u^2}{2\sum_{k=1}^n a_k^2}).$$

5. Przy oznaczeniach poprzedniego zadania, wykaż, że istnieje stała $C < \infty$ taka, że dla $p \geqslant 2$,

$$\|M_n - M_0\|_p := (\mathbf{E}|M_n - M_0|^p)^{1/p} \leqslant C\sqrt{p}(\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^{1/2}.$$

6. Niech $S = \sum_{k=1}^n a_k \varepsilon_k$, gdzie ε_k niezależne zmienne losowe takie, że $\mathbf{P}(\varepsilon_k = \pm 1) = 1/2$. Wykaż, że dla $p, q > 0$ istnieje stała $C_{p,q}$ zależna tylko od p i q dla której $\|S\|_p \leqslant C_{p,q}\|S\|_q$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 4

1. Rozpatrując rozkłady wykładnicze, gaussowskie i Poissona pokaż, że nie można poprawić rzędu oszacowań w nierównościach Bernsteina i Bennetta.

2. Załóżmy, że $(M_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^{\infty}$ jest martyngałem takim, że $\max_k \|M_k - M_{k-1}\|_\infty = a$, $\|\mathbf{E}((M_k - M_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1})\|_\infty \leqslant \sigma_k^2$ oraz $\sigma^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$. Wykaż, że

$$\Lambda_{M_n - M_0}(t) \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2}(e^{ta} - ta - 1)$$

oraz

$$\mathbf{P}(|M_n - M_0| \geqslant s) \leqslant 2\exp\Big(- \frac{s}{2a} \ln\Big(1 + \frac{sa}{\sigma^2}\Big)\Big).$$

3. Wykaż, że z odwrotnej nierówności wykładniczej Kołmogorowa wynika, że dla niezależnych zmiennych X_i o sredniej zero,

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{i=1}^n X_i \geqslant s\Big) \geqslant \frac{1}{\tilde{K}(\varepsilon)} \exp\Big(- (1+\varepsilon)\frac{s^2}{2\sigma^2}\Big),$$

o ile

$$\max(s, \sigma) \max_i \|X\|_\infty \leqslant \tilde{\delta}(\varepsilon)\sigma^2.$$

4. Niech X_i będą niezależnymi symetrycznymi zmiennymi losowymi oraz $|a_i| \leqslant 1$. Wykaż, że dla dowolnej funkcji wypukłej $f\colon F \to \mathbb{R}_+$,

$$\mathbf{E} f(\sum_{i=1}^n a_i X_i) \leqslant \mathbf{E} f(\sum_{i=1}^n X_i).$$

Wywnioskuj stąd, że dla funkcji wypukłej, niemalejącej $f\colon \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}_+$,

$$\mathbf{E} f(\|\sum_{i=1}^n a_i X_i\|) \leqslant \mathbf{E} f(\|\sum_{i=1}^n X_i\|).$$

5. Wykaż, że przy założeniach poprzedniego zadania nie musi być prawdą, że dla $s > 0$,

$$\mathbf{P}(\|\sum_{i=1}^n a_i X_i\| \geqslant s) \leqslant \mathbf{P}(\|\sum_{i=1}^n X_i\| \geqslant s).$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 5

1. Wykaż, że dla niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie
$$\mathbf{E}\max_{k\leqslant n}\|S_k\|^p \leqslant C^p\mathbf{E}\|S_n\|^p$$
dla $p \geqslant 1$ i stałej uniwersalnej C.

2. Wykaż, że dla niezależnych zmiennych losowych
$$\mathbf{E}\max_{k\leqslant n}\|S_k\|^p \leqslant C^p \max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathbf{E}\|S_k\|^p$$
dla $p \geqslant 1$ i stałej uniwersalnej C.

3. Wykaż, że nie istnieje stała uniwersalna C taka, że
$$\mathbf{E}\max_{k\leqslant n}|M_k| \leqslant C\mathbf{E}|M_n|$$
dla dowolnego martyngału $(M_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$.

4. Załóżmy, że X_i i Y_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie. Wykaż, że istnieją uniwersalne stałe C_1 i C_2 dla których
$$\mathbf{P}(\max_{k,l\leqslant n}|\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}h(X_i,Y_j)| \geqslant t) \leqslant C_1\mathbf{P}(|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h(X_i,Y_j)| \geqslant t/C_2)$$
dla dowolnej funkcji mierzalnej h.

5* Niech X_i będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych w ośrodkowej przestrzeni Banacha F. Wykaż, że następujące warunki są równoważne.
i) $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ zbiega według prawdopodobieństwa
ii) $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ zbiega p.n.
iii) $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ zbiega według rozkładu.

6* Wykaż, że istnieją stałe C_i taka, że dla dowolnych niezależnych rzeczywistych zmiennych losowych X_i oraz liczb a_k,
$$\mathbf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n}||S_k|-a_k| \geqslant t) \leqslant C_1 \max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathbf{P}(||S_k|-a_k| \geqslant t/C_2).$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 6

1. Niech X będzie zmienną losową o wartościach w osrodkowej przestrzeni Banacha F. Wykaż, że
a) dla $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja $\varphi\colon F \to F$ przyjmująca tylko przeliczalnie wiele wartości taka, że $\|X - \varphi(X)\| \leqslant \varepsilon$ p.n.,
b) jeśli $\mathbf{E}\|X\| < \infty$, to dla $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja $\varphi\colon F \to F$ przyjmująca tylko skończenie wiele wartości taka, że $\mathbf{E}\|X - \varphi(X)\| \leqslant \varepsilon$.

2. Wykaż, że jeśli X_i są zmiennymi o jednakowym rozkładzie takimi, że $\mathbf{P}(X_i \neq 0) > 0$, to $\limsup_{n\to\infty} \frac{\|S_n\|}{\sqrt{n}} = \infty$ p.n..

3. Załóżmy, że X_i są niezależne o wartościach w F. Wykaż, że
a) Dla dowolnych $s, t > 0$,
$$\mathbf{P}(\max_{k\leqslant n} \|S_k\| > 3t + s) \leqslant \mathbf{P}(\max_{k\leqslant n} \|S_k\| > t)^2 + \mathbf{P}(\max_{k\leqslant n} \|X_k\| > s).$$
b) Jeśli zmienne X_i są symetryczne, to dla $s, t > 0$,
$$\mathbf{P}(\max_{k\leqslant n} \|S_k\| > 2t + s) \leqslant 4\mathbf{P}(\|S_n\| > t)^2 + \mathbf{P}(\max_{k\leqslant n} \|X_k\| > s).$$

4. Niech $S := \sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i$ dla pewnych $x_i \in F$. Wykaż, że dla $p, q > 0$ istnieją stałe $C_{p,q} < \infty$ zależne tylko od p i q takie, że $(\mathbf{E}\|S\|^p)^{1/p} \leqslant C_{p,q}(\mathbf{E}\|S\|^q)^{1/q}$.

5. Załóżmy, że $0 < p < \infty$, zmienne X_i są niezależne i symetryczne o wartościach w F. Wykaż, że
$$\mathbf{E}\|S_n\|^p \leqslant 2 \cdot 3^p \mathbf{E} \max_{i\leqslant n} \|X_i\|^p + 2(3t_0)^p,$$
gdzie
$$t_0 := \inf\{t > 0\colon \mathbf{P}(\|S_n\| > t) \leqslant (8 \cdot 3^p)^{-1}\}.$$

6. Przestrzeń Banacha F nazywamy typu $p \geqslant 1$ jeśli istnieje stała T_p taka, że dla dowolnych wektorów $x_i \in F$,
$$(\mathbf{E}\|\sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i\|^p)^{1/p} \leqslant T_p(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p)^{1/p}.$$
Wykaż, że
a) Jeśli przestrzeń jest typu p, to jest typu q dla $q \leqslant p$.
b) Przestrzenie Hilberta są typu 2.
c) Każda przestrzeń Banacha jest typu 1 i nie istnieją przestrzenie typu $p > 2$.
d) Przestrzeń L^p jest typu $\min(p, 1)$ dla $p < \infty$.
e) Przestrzeń c_0 nie ma nietrywialnego typu.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 7

1. Załóżmy, że X_i są niezależnymi ograniczonymi zmiennymi losowymi o średniej zero spełniającymi warunki:
   i) $a_n^2 := \mathrm{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}X_i^2 \to \infty$
   ii) $\|X_n\|_\infty \frac{\sqrt{\ln\ln a_n^2}}{a_n} \to 0.$
   Wykaż, że
   $$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2a_n^2 \ln\ln a_n^2}} = 1 \text{ p.n.}$$

2. Załóżmy, że X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie ze średnią zero i warinacją σ^2. Wykaż, że dla dowolnej funkcji ciągłej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
   $$\limsup_{n\to\infty} f\Big(\frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}}\Big) = \sup_{t\in[-\sigma,\sigma]} f(t) \text{ p.n.},$$
   $$\liminf_{n\to\infty} f\Big(\frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}}\Big) = \inf_{t\in[-\sigma,\sigma]} f(t) \text{ p.n.}.$$

3. Załóżmy, że X_i są niezależnymi wektorami losowymi w ośrodkowej przestrzeni Banacha o tym samym rozkładzie co X. Wykaż, że warunek
   $$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|S_n\|}{\sqrt{2n\ln\ln n}} < \infty \text{ p.n.}$$
   implikuje:
   i) $\mathbf{E}\frac{\|X\|^2}{LL\|X\|} < \infty$, gdzie $LLx := \ln\ln(x \vee 10)$.
   ii) $\mathbf{E}X = 0$ oraz $\sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \mathbf{E}|x^*(X)|^2 < \infty$.

4. Załóżmy, że X_i są niezależnymi wektorami losowymi w ośrodkowej przestrzeni Banacha typu 2 o tym samym rozkładzie co X oraz $\mathbf{E}\frac{\|X\|^2}{LL\|X\|} < \infty$. Wykaż, że $\frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}}$ zbiega do 0 według prawdopodobieństwa.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 8

1. Niech $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą o nośniku zwartym, Wykaż, że
a) Dla $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ oraz $t \in \mathbb{R}^n$
$$t^\alpha \widehat{f}(t) = i^{|\alpha|}\widehat{D^\alpha f}(t)$$
i wywnioskuj stąd, że $\widehat{f}$ jest funkcją szybko znikającą w nieskończoności,
b) dla dowolnej miary skończonej μ na $\mathbb{R}^n$,
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(-y)\widehat{\mu}(y)dy,$$
w szczególności
$$f(t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{itx}\widehat{f}(-x)dx.$$
c) Dla $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$,
$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{itx}(ix)^\alpha \widehat{f}(-x)dx.$$

2. a) Niech ν będzie miarą na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ taką, że $\int x^2 d\nu(x) < \infty$ oraz X ma rozkład nieskończenie podzielny $\pi_{a,\sigma^2,\nu}$. Wykaż, że $\mathbf{E}X^2 < \infty$ oraz
$$\mathbf{E}X = a + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{y^3}{1+y^2}d\nu(y),$$
$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} y^2 d\nu(y).$$
b) Wykaż, że jeśli $X \sim \pi_{a,\sigma^2,\nu}$ oraz $\mathbf{E}X^2 < \infty$, to $\int x^2 d\nu(x) < \infty$.

3. Załóżmy, że ciąg zmiennych nieskończenie podzielnych X_n zbiega według rozkładu do zmiennej X. Wykaż, że X jest nieskończenie podzielny.

4. Wykaż, że jedyne ograniczone zmienne nieskończenie podzielne, to stałe.

5. Wykaż, że zmienna X ma symetryczny rozkład nieskończenie podzielny wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $\sigma \geqslant 0$ oraz miara ν na $(0,\infty)$ taka, że $\int_{(0,\infty)} \min(1,x^2)d\nu(x) < \infty$ dla których
$$\varphi_X(t) = \exp\Big(-\frac{t^2\sigma^2}{2} + \int_{(0,\infty)} (\cos(tx)-1)d\nu(x)\Big).$$

6. Udowodnij, że zmienna X ma nieujemny rozkład nieskończenie podzielny wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $a \geqslant 0$ oraz miara ν na $(0,\infty)$ taka, że $\int_{(0,\infty)} \min(1,x)d\nu(x) < \infty$ dla których
$$\varphi_X(t) = \exp\Big(ita + \int_{(0,\infty)} (e^{itx}-1)d\nu(x)\Big).$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 9

1. Niech $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną, ograniczoną taką, że
$$\limsup_{x\to 0} \frac{|x-q(x)|}{x^2} < \infty.$$
Wykaż, że zmienna X jest nieskończenie podzielna wtedy i tylko wtedy gdy istnieje układ Levy'ego (a,σ,ν) taki, że
$$\varphi_X(t) = \exp\Big(ita - \frac{t^2\sigma^2}{2} + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (e^{itx} - 1 - itq(x))d\nu(x)\Big).$$

2. Niech (a,σ^2,ν) będzie układem Levy'ego. Wykaż, że istnieje proces stochastyczny $(X_t)_{t\geqslant 0}$ taki, że
i) $X_0 = 0$ p.n.
ii) X_t ma przyrosty niezależne
iii) $X_t - X_s \sim \pi_{(t-s)a,(t-s)\sigma^2,(t-s)\nu}$ dla $0 \leqslant s < t$.

3. Niech N_t będzie procesem Poissona z intensywnością λ oraz $X, X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie. Określmy *złożony proces Poissona* wzorem
$$Y_t := \sum_{s=1}^{N_t} X_s.$$
Wykaż, że
a) Y_t jest procesem o przyrostach niezależnych i trajektoriach prawostronnie ciągłych,
b) $\mathbf{E}Y_t = \lambda t\mathbf{E}X$, $\mathrm{Var}(Y_t) = \lambda t\mathbf{E}X^2$
c) $\mathbf{E}\mathrm{Wah}_{[0,T]}(Y) = \lambda T\mathbf{E}|X|$,
d) $\mathbf{P}(\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |Y_t - \lambda t\mathbf{E}X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{4\lambda T}{\varepsilon^2}\mathbf{E}X^2$.

4. Wykaż, że dla dowolnego układu Levy'ego (a,σ^2,ν) istnieje proces Z_t spełniający warunki i)-iii) zadania 2 oraz taki, że
iv) Trajektorie Z_t są prawostronnie ciągłe i posiadają lewostronne granice.

5. Udowodnij, że przy założeniach poprzedniego zadania, jeśli $\sigma = 0$ oraz $\int |y| d\nu < \infty$, to możemy skonstruować proces X_t spełniający warunki poprzedniego zadania którego trajektorie mają wahanie ograniczone na każdym przedziale skończonym.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 10

1. Wykaż (bez używania funkcji charakterystycznych), że jeśli X jest rozkładem α-stabilnym oraz X_1, X_2 są niezależnymi kopiami X, to $c_1X_1 + c_2X_2 \sim (c_1^\alpha + c_2^\alpha)^{1/\alpha}X + B(c_1, c_2)$ dla $c_1, c_2 \geqslant 0$.

2. Scharakteryzuj wszystkie nieujemne rozkłady stabilne.

3. Scharakteryzuj wszystkie symetryczne rozkłady stabilne.

4. Niech $T_1, T_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1, zaś $\Gamma_j := T_1 + \ldots + T_j$.
a) Niech S_j będzie momentem j-tego skoku procesu Poissona N z intensywnością λ, tzn. $S_j := \inf\{t\colon N_t = j\}$. Wykaż, że ciąg (S_j) ma ten sam rozkład, co ciąg (Γ_j/λ).
b) Załóżmy, że $(\Gamma_{j,k})$, $k = 1, 2\ldots, n$ są niezależnymi kopiami (Γ_j) oraz $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$. Niech $(Z_j^*)_{j\geqslant 1}$ oznacza niemalające uporzadkowanie zbioru $\{\Gamma_{j,k}/\lambda_k\colon j \geqslant 1, 1 \leqslant k \leqslant n\}$. Wykaż, że (Z_j^*) ma ten sam rozkład, co $(\frac{\Gamma_j}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n})$.
c) Wykaż, że dla $j > p > 0$,
$$\mathbf{E}\Gamma_j^{-p} = \frac{\Gamma(j-p)}{\Gamma(j)} \sim \frac{1}{j^p}.$$

5. Ustalmy $0 < \alpha < 2$. Niech (Γ_j) będzie jak w porzednim zadaniu, a $X, X_1, X_2, \ldots$ będzię ciągiem niezależnych symetrycznych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, niezależnym od (Γ_j) takim, że $\mathbf{E}|X|^\alpha < \infty$. Wykaż, że
a) Szereg
$$S := \sum_{j=1}^{\infty} \Gamma_j^{-1/\alpha} X_j$$
jest zbieżny p.n.
b) S ma symetryczny rozkład α-stabilny
c*) $\lim_{t\to\infty} t^\alpha \mathbf{P}(|S| > t) = \mathbf{E}|X|^\alpha$.

6. Wykaż, że jeśli X ma rozkład α-stabilny oraz $\alpha \neq 2$, to $\mathbf{E}|X|^p < \infty$ wtedy i tylko wtedy gdy $p < \alpha$.