Metody Losowe w Geometrii Wypukłej - zestaw I

1. Niech x_0 będzie ustalonym punktem S^n a H podprzestrzenią w $\mathbb{R}^{n+1}$ wymiaru n, nie przechodzącą przez x_0. Wówczas $\mathbb{R}^{n+1}\setminus H$ jest sumą dwóch otwartych półprzestrzeni H_+ zawierającej x_0 i H_- nie zawierającej x_0. Niech $i = i_H \colon S^n \to S^n$ będzie odbiciem względem H. Określmy dla mierzalnej, ograniczonej funkcji $f \colon S^n \to \mathbb{R}$

$$f^H(x) := \begin{cases} \max\{f(x), f(ix)\} & \text{dla } x \in H_+ \\ \min\{f(x), f(ix)\} & \text{dla } x \in H_- \\ f(x) & \text{dla } x \in H \end{cases}$$

   Wykaż, że
   i) f i f^H mają ten sam rozkład względem σ_n;
   ii) Jeśli f jest Lipschitzowska ze stałą L, to f^H też jest Lipschitzowska ze stałą L;
   iii) $\int_{S^n} d(x_0, x) f(x) d\sigma_n(x) \geqslant \int_{S^n} d(x_0, x) f^H(x) d\sigma_n(x)$, ponadto, jeśli f jest ciągła, to równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $f = f^H$.

2. Funkcję g na S^n nazywamy radialną (względem ustalonego punktu $x_0 \in S^n$, jeśli $d(x, x_0) \leqslant d(y, x_0)$ implikuje $g(x) \geqslant g(y)$. Jeśli $f \colon S^n \to \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną ograniczoną to jej radialną symetryzacją nazywamy funkcję radialną f^* o takim samym rozkładzie względem σ_n, co f. Udowodnij, że
   i) Funkcja f^* istnieje i jest jednoznacznie wyznaczona z dokładnością do zbioru miary zero.
   ii) Funkcja g jest radialna wtedy i tylko wtedy, gdy $g^H = g$ dla wszystkich H.

3. Ustalmy funkcję L-Lipschitzowską $f \colon S^n \to \mathbb{R}$ i niech

   $\mathcal{A} := \{g \colon S^n \to \mathbb{R} \colon\ g\ L\text{-Lipschitzowska o tym samym rozkładzie względem } \sigma_n \text{ co } f\}.$

   Ponadto niech $m := \inf_{g \in \mathcal{A}} \int_{S^n} d(x_0, x) g(x) d\sigma_n(x)$. Udowodnij, że
   i) Istnieje ciąg $(g_k) \subset \mathcal{A}$ jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji g taki, że $\int_{S^n} d(x_0, x) g_k(x) d\sigma_n(x) \to m$ przy $k \to \infty$ (skorzystać z twierdzenia Arzeli-Ascoli)
   ii) $g \in \mathcal{A}$ oraz $m = \int_{S^n} d(x_0, x) g(x) d\sigma_n(x)$.
   iii) $g = f^*$.

4. (Izoperymetria sferyczna) Wykaż, że jeśli A jest zbiorem borelowskim w S^n takim, że $\sigma_n(A) = \sigma_n(B(x_0, r))$, to
   i) Dla wszystkich $t > 0$, $\sigma_n(A_t) \geqslant \sigma_n((B(x_0, r))_t) = \sigma_n(B(x_0, r + t))$.
   ii) $\sigma_n^+(A) \geqslant \sigma_n^+(B(x, r))$. *Wskazówka.* Wykorzystaj fakt, że symetryzacja radialna funkcji $\max\{t - d(x, A), 0\}$ jest 1-Lipschitzowska.

5. Wykaż, że $\sigma_n(A) \geqslant \frac{1}{2}$ implikuje $1 - \sigma_n(A_t) \leqslant e^{-(n-1)t^2/2}$.

6. Wykaż, że dla dowolnej funkcji $f \colon S^n \to \mathbb{R}$, L-lipschitzowskiej,

$$\sigma_n(\{x \colon f(x) \geqslant \mathrm{Med}_{\sigma_n}(f) + Lt\}) \leqslant e^{-(n-1)t^2/2}$$

   oraz

$$\sigma_n(\{x \colon |f(x) - \mathrm{Med}_{\sigma_n}(f)| \geqslant Lt\}) \leqslant 2e^{-(n-1)t^2/2},$$

   gdzie $\mathrm{Med}_{\sigma_n}(f)$ oznacza medianę funkcji f względem σ_n. Udowodnij ponadto, że

$$|\mathrm{Med}_{\sigma_n}(f) - \int f d\sigma_n| \leqslant CL(n-1)^{-1/2}$$

i wywnioskuj stąd, że

$$\sigma_n(\{x\colon |f(x) - \int f d\sigma_n| \geqslant Lt\}) \leqslant C' e^{-(n-1)t^2/4},$$

gdzie C i C' są pewnymi stałymi uniwersalnymi.

7. Korzystając z faktu, że suma zbiorów borelowskich jest zbiorem mierzalnym wykaż, że dla dowolnych niepustych zbiorów borelowskich $A, B \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{vol}_n(A+B)^{1/n} \geqslant \mathrm{vol}_n(A)^{1/n} + \mathrm{vol}_n(B)^{1/n}.$$

8. Wykaż, że zbiór $K + L$ jest
i) wypukły, jeśli zbiory K i L są wypukłe;
ii) wielościanem wypukłym, jeśli K i L są wielościanami wypukłymi;
iii) symetryczny, jeśli zbiory K i L są symetryczne.

9. *Zonotopem* nazywamy podzbiór $\mathbb{R}^n$ postaci $I_1 + I_2 + \ldots + I_k$. Wykaż, że
i) zonotop jest wypukłym wielościanem posiadającym środek symetrii,
ii) każdy środkowosymetryczny wielokąt wypukły na płaszczyźnie jest zonotopem,
iii) zbiór $B_1^3 = \{x \in \mathbb{R}^3\colon\ |x_1| + |x_2| + |x_3| \leqslant 1\}$ nie jest zonotopem.

Metody Losowe w Geometrii Wypukłej - zestaw II

1. Wykaż, że dla dowolnej funkcji L-Lipschitzowskiej $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja L-Lipschitzowska g klasy C^1 taka, że $\|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

2. Udowodnij, że istnieje stała uniwersalna C taka, że dla $1 < p < \infty$, dowolnej funkcji L-Lipschitzowskiej F,
$$\Big|\Big(\int |F|^p d\gamma_n\Big)^{1/p} - \int |F| d\gamma_n\Big| \leqslant C\sqrt{p}L$$
oraz
$$|\mathrm{Med}_{\gamma_n}(F) - \int F d\gamma_n\Big| \leqslant CL.$$
Gdy γ_n zastąpimy przez σ_n to zachodzą analogiczne nierówności tylko ze stałą $\frac{L}{\sqrt{n-1}}$ zamiast L. Wywnioskuj stąd, że dla dowolnego wektora gaussowskiego w $\mathbb{R}^n$,
$$\Big|(\mathbb{E}\|X\|^p)^{1/p} - \mathbb{E}\|X\|\Big| \leqslant C\sqrt{p}\sigma(X) \quad \text{i} \quad |\mathbb{E}\|X\| - \mathrm{Med}(\|X\|)| \leqslant C\sigma(X).$$

3. Niech G będzie kanonicznym wektorem gaussowskim w $\mathbb{R}^n$. Wykaż, że
i) $\mathbb{P}(||G| - \sqrt{n}| \geqslant t) \leqslant C\exp(-ct^2)$ dla pewnych stałych $C < \infty$ oraz $c > 0$.
ii) $|(\mathbb{E}|G|^p)^{1/p} - \sqrt{n}| \leqslant C\sqrt{p}$, $p \geqslant 1$,
iii) $\mathbb{E}\|G\|_\infty \sim \sqrt{\log(n+1)}$ i $\mathbb{E}\|G\|_\infty \sim \sqrt{\log(n+1)} + \sqrt{p}$, $p \geqslant 1$.

4. Załóżmy, że E jest ośrodkową przestrzenią Banacha, a X wektorem gaussowskim w X (tzn. takim wektorem, że $\varphi(X)$ jest gaussowski dla każdego funkcjonału φ). Wykaż, że dla $t > 0$,
$$\mathbb{P}(|\|X\| - \mathbb{E}\|X\|| \geqslant t\sigma(X)) \leqslant 2\exp(-\frac{2}{\pi^2}t^2),$$
gdzie
$$\sigma(X) = \sup_{\|\varphi\|_* \leqslant 1} \mathrm{Var}^{1/2}(\varphi(X)).$$
Wskazówka. Istnieją takie funkcjonały $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ o normie nie większej niż 1, że $\|x\| = \sup_n |\varphi_n(x)|$ dla $x \in E$.

5. Założmy, że $g_1, g_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi $\mathcal{N}(0,1)$, a $x_0, x_1, x_2, \ldots$ takimi wektorami w ośrodkowej przestrzeni Banacha E, że szereg $X = x_0 + \sum_{i=1}^n x_i g_i$ jest zbieżny w L_2. Oblicz $\sigma(X)$.

6. Udowodnij, że klasa wszystkich niepustych zwartych podzbiorów ustalonego zbioru zwartego K jest zwartą przestrzenią w metryce Hausdorffa.

7. Pokaż, że granicą zbiorów wypukłych w metryce Hausdorffa jest zbiór wypukły, a granicą zbiorów symetrycznych jest zbiór symetryczny.

8. Wykaż, że infimum w definicji metryki geometrycznej i Banacha-Mazura jest osiągane.

Metody Losowe w Geometrii Wypukłej - zestaw III

1. Niech $\mathcal{E}$ będzie elipsoidą. Oblicz $d_G(\mathcal{E}, B_2^n)$.

2. Pokaż, że $d_{\mathrm{BM}}(K, L) = d_{\mathrm{BM}}((\mathbb{R}^n, \| \|_K), (\mathbb{R}^n, \| \|_L))$ dla dowolnych symetrycznych n-wymiarowych ciał wypukłych K i L.

3. Oblicz $d_{\mathrm{BM}}(B_2^n, B_p^n)$ dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

4. Załóżmy, że K jest wielościanem w $\mathbb{R}^n$ takim, że $d_{\mathrm{BM}}(B_2^n, K) \leqslant d$, pokaż, że K ma przynajmniej $e^{n/(2d^2)}$ ścian.
   Wskazówka. Załóżmy, że $K = \{x \colon \langle x, v_i \rangle \leqslant 1, i = 1, \ldots, m\}$ oraz $B_2^n \subset K \subset dB_2^n$. Wówczas $|v_i| \leqslant 1$ oraz $S^{n-1} \subset \bigcup_i C(v_i, \frac{1}{d})$, gdzie $C(v, \varepsilon) = \{x \colon \ \langle x, v \rangle \geqslant \varepsilon\}$. Ponadto $\sigma_{n-1}(C(v, \varepsilon)) \leqslant (1 - \varepsilon^2)^{n/2}$ dla $|v| = 1$ i $\varepsilon \in (0, 1)$.

5. Wykaż, że dla $\varepsilon > 0$ istnieje wielościan w $\mathbb{R}^n$ o conajwyżej $C(\varepsilon)^n$ ścianach taki, że $d_{\mathrm{BM}}(B_2^n, K) \leqslant 1 + \varepsilon$, gdzie $C(\varepsilon)$ jest stałą zależną tylko od n.

6. Udowodnij, że $n^{-1/2} B_2^n$ jest elipsoidą maksymalnej objętości zawartą w B_1^n. Znajdź elipsoidę maksymalnej objętości w B_p^n.

7. Wykaż, że jeśli K jest ciałem wypukłym, to istnieje dokładnie jedna elipsoida maksymalnej objętości $\mathcal{E}_{\max}$ zawarta w K. Ponadto, jeśli x jest środkiem $\mathcal{E}_{\max}$, to $\mathcal{E}_{\max} - x \subset K - x \subset n(\mathcal{E}_{\max} - x)$.

8. Udowodnij, że $d_{\mathrm{BM}}(l_1^n, l_\infty^n) \leqslant \sqrt{n}$, jeśli $n = 2^m$. (*Wskazówka.* Użyj macierzy Walsha.)

9. Wykaż, że $d_{\mathrm{BM}}(l_1^n, l_\infty^n) \sim \sqrt{n}$ dla wszystkich n.

Metody Losowe w Geometrii Wypukłej - zestaw IV

1. Wykaż, że
   i) A^0 jest domkniętym, wypukłym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ zawierającym 0,
   ii) $A^0 = \mathrm{conv}(A)^0$,
   iii) A^0 jest zwarty, jeśli $0 \in \mathrm{int}(\mathrm{conv}(A))$,
   iv) $0 \in \mathrm{int}(A^0)$, jeśli A jest ograniczony,
   v) A^0 jest symetryczny, jeśli A jest symetryczny,
   vi) $(T^*)^{-1}(A^0) = (T(A))^0$ dla $T \in \mathrm{GL}(n)$, w szczególności $(tA)^0 = \frac{1}{t}A^0$ dla $t > 0$,
   vii) $A^0 \supset B^0$, jeśli $A \subset B$.

2. Niech $\mathcal{E}$ będzie elipsoidą o środku w zerze, znajdź $\mathcal{E}^0$. Oblicz $\mathrm{vol}_n(\mathcal{E})\mathrm{vol}_n(\mathcal{E}^0)$.

3. Wykaż, że istnieje dokładnie jedna elipsoida symetryczna minimalnej objętości $\mathcal{E}_{\min}$ zawierająca symetryczne n-wymiarowe ciało wypukłe K oraz $\mathcal{E}_{\min} \supset K \supset n^{-1/2}\mathcal{E}_{\min}$.

4. Udowodnij, że dla zbiorów wypukłych K i L, $\mathrm{conv}(K, L)^0 = K^0 \cap L^0$ oraz, jeśli $0 \in K \cap L$, to $(K \cap L)^0 = \mathrm{conv}(K^0, L^0)$.

5. Dla przestrzeni metrycznej (T, d) określmy

   $$S(T, d, \varepsilon) := \sup\Big\{N\colon \quad \text{istnieją } x_1, \ldots, x_N \in T,\ d(x_i, x_j) > \varepsilon \text{ dla } i \neq j\Big\},$$

   udowodnij, że $N(T, d, \varepsilon) \leqslant S(T, d, \varepsilon) \leqslant N(T, d, \varepsilon/2)$.

6. Zdefiniujmy dla ciał wypukłych K, L,

   $$\tilde{N}(K, L) := \inf\Big\{N\colon\ K \subset \bigcup_{i=1}^{N}(x_i + L) \text{ dla pewnych } x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^n\Big\}.$$

   Pokaż, że $\tilde{N}(K, L) \leqslant N(K, L)$, ponadto dla symetrycznych ciał L, $N(K, 2L) \leqslant \tilde{N}(K, L)$.

7. Wykaż, że $N(K_1 + \ldots + K_n, L_1 + \ldots + L_n) \leqslant \prod_{i=1}^{n} N(K_i, L_i)$.

Metody Losowe w Geometrii Wypukłej - zestaw V

1. Niech $\mathcal{E}$ będzie symetryczną elipsoidą w $\mathbb{R}^n$, wykaż, że istnieje przestrzeń V wymiaru $k \geqslant n/2$ taka, że $V \cap \mathcal{E}$ jest kulą euklidesową. Wywnioskuj stąd, że dla symetrycznego ciała wypukłego K i $\varepsilon > 0$ istnieje podprzestrzeń V wymiaru $k \geqslant c(\varepsilon)d(K)$ taka, że $d_G(K \cap V, B_2^n \cap V) \leqslant 1 + \varepsilon$.

2. Wykaż, że jeśli K jest symetrycznym ciałem wypukłym w $\mathbb{R}^n$ takim, że istnieje podprzestrzeń V wymiaru k dla której $d_{\mathrm{BM}}(K \cap V, B_2^k) \leqslant a$, to $d(K) \leqslant c(a)k$.

3. Wykaż, że dla symetrycznych ciał wypukłych K i L, $d(K) \leqslant d(L) d_{\mathrm{BM}}(K, L)$. W szczególności $d(K) = d(TK)$ dla $T \in \mathrm{GL}(n)$.

4. Udowodnij, że dla dowolnego n-wymiarowego ciała wypukłego w $\mathbb{R}^n$,
$$d(K)d(K^0) \geqslant c\frac{n^2}{d_{\mathrm{BM}}^2(K, B_2^n)}.$$
W szczególności $d(K)d(K^0) \geqslant cn$, czyli $\max\{d(K), d(K^0)\} \geqslant \sqrt{n}$.

5. Pokaż, że dla dowolnej podprzestrzeni V i symetrycznego ciała wypukłego $(K \cap V)^0 = P_V(K^0)$, gdzie P_V oznacza rzut ortogonalny na V.

6. Wykaż dualną wersję twierdzenia Dvoretzky'ego - dla dowolnego symetrycznego ciała wypukłego K istnieje rzut P na przestrzeń wymiaru $k \geqslant c(\varepsilon)d(K^0)$ taki, że $d_{\mathrm{BM}}(PK, B_2^k) \leqslant 1 + \varepsilon$.

Metody Losowe w Geometrii Wypukłej - zestaw VI

Załóżmy, że (M, ρ) jest zwartą przestrzenią metryczną, zaś G jej grupą izometrii. Pokażemy, że istnieje miara probabilistyczna μ na M niezmiennicza względem działania G.

1. Niech N_ε oznacza minimalną ε-sieć w M oraz

$$\varphi_\varepsilon(f) = \frac{1}{|N_\varepsilon|} \sum_{x \in N_\varepsilon} f(x) \text{ dla } f \in C(M).$$

   Wykaż, że
   i) da się wybrać taki podciąg $\varepsilon_n \to 0$, że dla każdego $f \in C(M)$ istnieje granica $\varphi(f) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{\varepsilon_n}(f)$.
   ii) $\varphi(f) = \int_M f(x) d\mu(x)$ dla pewnej miary probabilistycznej f;
   iii) jeśli N'_ε jest inną minimalną ε-siecią, to istnieje takie przyporządkowanie, że $u\colon N_\varepsilon \to N'_\varepsilon$, że $\rho(x, u(x)) \leqslant 2\varepsilon$ dla wszystkich x (Wsk. skorzystaj z lematu Halla o małżeństwach);
   iv) μ jest G-niezmiennicza, tzn. $\mu(gA) = \mu(A)$ dla $g \in G$.

2. Wykaż, że jeśli grupa izometrii jest tranzytywna, to miara μ jest wyznaczona jednoznacznie.

3. Załóżmy teraz, że (G, ρ) jest zwartą grupą metryczną. Wówczas oczywiście G jest podgrupą izometrii. Miarę G-niezmienniczą skonstruowaną w poprzednim zadaniu nazywamy miarą Haara. Wykaż, że
   i) miara Haara jest niezmiennicza ze względu zarówno na mnożenie z lewej jak i z prawej strony;
   ii) miara Haara jest niezmiennicza ze względu na odwrotność, tzn. $\mu(A) = \mu(A^{-1})$.

4. Załóżmy, że $n = 2k$. Wykaż, że istnieje macierz $a \in O(n)$ taka, że $A^2 = I$ oraz dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{C}\sqrt{n}\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 + \|Ax\|_1 \leqslant 2\sqrt{n}\|x\|_2$$

   gdzie C jest stałą uniwersalną.

Metody Losowe w Geometrii Wypukłej - zestaw VII

1. Wykaż następującą formę zasady minoryzacyjnej Sudakowa: jeśli $(X_t)_{t\in T}$ jest scentrowanym procesem gaussowskim, $d(t,s) = (\mathbb{E}(X_t - X_s)^2)^{1/2}$ dla $t, s \in T$, to
$$\sup_{\varepsilon>0} \varepsilon\sqrt{\log N(T,d,\varepsilon)} \leqslant C\mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t.$$
Wskazówka. Sprowadzić do $T \subset \mathbb{R}^n$ i $X_t = \sum_{i=1}^n t_i g_i$ dla $t \in T$. Potem zauważyć, że jeśli dla takich $g(T) = \mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t$, to $g(T) = g(\mathrm{conv}(T))$ oraz $g(\mathrm{conv}(T,-T)) \leqslant 2g(T)$ gdy $0 \in \mathrm{conv}T$.

2. Wykaż, że
i) Układ wielomianów Hermite'a na prostej
$$h_k(x) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k!}} e^{x^2/2} \frac{d^k}{dt^k}(e^{-x^2/2}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$
jest bazą ortonormalną w $L_2(\mathbb{R}, \gamma_1)$.
ii) Układ Hermite'a w $\mathbb{R}^n$
$$h_\alpha(x) = \prod_{j=1}^n h_{\alpha_j}(x_j), \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$$
jest bazą ortonormalną w $L_2(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$.

3. Określmy *półgrupę Ornsteina-Uhlenbecka* wzorem
$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(e^{-t}x + (1-e^{-2t})^{1/2} y) d\gamma_n(y).$$
Udowodnij, że
i) $P_t \colon L_p(\mathbb{R}^n, \gamma_n) \to L_p(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$ i $\|P_t f\|_p \leqslant \|f\|_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$,
ii) P_t jest półgrupą na L_p, tzn. $P_0 f = f$, $P_{t+s} = P_t P_s$,
iii) $P_t f \to \int f d\gamma_n$ w $L_p = L_p(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$ dla $f \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$,
iv) Operatory P_t są samosprzężone na L_2,
v) $P_t h_\alpha = e^{-t|\alpha|} h_\alpha$. *Wskazówka.* Dla $n = 1$, $P_t h_k$ jest wielomianem stopnia k, ortogonalnym do h_l, $l < k$.

4. Załóżmy, że E jest przestrzenią Banacha, a T jest ciągłym operatorem liniowym na $L_p(X, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$. Określmy
$$L_p(X, E) := \{f \colon X \to E \text{ mierzalne} : \|f\|_p = (\int_X \|f(x)\|^p d\mu)^{1/p} < \infty\},$$
$$L_p \otimes E := \{f \in L_p(X,E) \colon \ f = \sum_{i=1}^k u_i f_i, \ f_i \in L_p(X), u_i \in E\}.$$
oraz $S(\sum_{i=1}^k u_i f_i) = \sum_{i=1}^k u_i T f_i$. Jeśli S jest ciągłe, to oczywiście S ma jednoznaczne przedłużenie na domknięcie $L_p \otimes E$ w $L_p(X,E)$. Zarówno S, jak i to przedłużenie, będziemy oznaczać przez $T \otimes \mathrm{Id}$. Wykaż, że
i) S jest dobrze określone;
ii) $L_p \otimes E$ jest liniową podprzestrzenią $L_p(E)$, oraz jest w niej gęsta, gdy E jest ośrodkowe;
iii) Jeśli $p = 2$ oraz E jest przestrzenią Hilberta, to $\|S\| = \|T\|$, ogólniej

$\|S\| \leqslant \|T\| d_{\mathrm{BM}}(E,H)$, jeśli E jest izomorficzne z przestrzenią Hilberta H;
iv) Jeśli P_t jest jak w poprzednim zadaniu, to

$$P_t \otimes \mathrm{Id} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(e^{-t}x + (1-e^{-2t})y) d\gamma_n(y)$$

oraz $\|S\|_{L_p(E)} \leqslant 1$;
v) Jeśli Q_k jest rzutem w $L_2(\gamma_n)$ na $\mathrm{Lin}(h_\alpha \colon |\alpha| = k\}$, to

$$Q_k \otimes \mathrm{Id} f = \sum_{|\alpha|=k} h_\alpha \int f(x) h_\alpha(x) d\gamma_n(x)$$

oraz

$$P_t \otimes \mathrm{Id} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-tk} Q_k \otimes \mathrm{Id}.$$

Metody Losowe w Geometrii Wypukłej - zestaw VIII

W zadaniach poniżej c i C oznaczają stałe uniwersalne, które mogą się różnić przy każdym wystąpieniu.

1. Określmy dla symetrycznego ciała wypukłego K w $\mathbb{R}^n$

$$M(K) = \int_{S^{n-1}} \|x\|^2 d\sigma_{n-1}(x).$$

   Wykaż, że
   i) $\sqrt{n}M(K) = (\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K^2 d\gamma_n(x))^{1/2}$.
   ii) $M(K)M(K^0) \geqslant 1$
   iii) Istnieje $T \in \mathrm{GL}(n)$ takie, że

$$M(TK)M((TK)^0) \leqslant C\Big(1 + \log_{\mathrm{BM}}(K, B_2^n)\Big) \leqslant C(1 + \log n).$$

2. Pokaż, że $M(B_1^n)M(B_\infty^n) \geqslant c\sqrt{1 + \log(n)}$.

3. Udowodnij, że dla dowolnego $T \in \mathrm{GL}(n)$,

$$M(TB_1^n)M((TB_1^n)^0) \geqslant c\sqrt{1 + \log(n)}.$$

4. Pokaż, że istnieje n-wymiarowe ciało wypukłe takie, że

$$\inf_{T \in \mathrm{GL}(n)} M(TK)M((TK)^0) \geqslant c(1 + \log n).$$

Metody Losowe w Geometrii Wypukłej - zestaw IX

Celem tego zestawu jest naszkicowanie dowodu, że dla dowolnej popprzestrzeni $\mathbb{R}^n$ wymiaru $n-1$ i $n \geqslant 2$,

$$\mathrm{vol}_{n-1}(B_\infty^{n-1}) \leqslant \mathrm{vol}_{n-1}(B_\infty^n \cap E) \leqslant \sqrt{2}\mathrm{vol}_{n-1}(B_\infty^{n-1}). \tag{1}$$

Dolne (łatwiejsze) oszacowanie pochodzi od Hensleya (1979), górne od Balla (1986). Oczywiście oba są optymalne.

By udowodnić górną nierówność wykorzystamy udowodnione przez Balla oszacowanie

$$\frac{1}{\pi}\int_{\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|^p \leqslant \sqrt{\frac{2}{p}} \quad \text{dla } p \geqslant 2. \tag{2}$$

Można tez wykazać, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

1. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[-1/2, 1/2]$. Wykaż, że jeśli

$$E = a^\perp = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{k=1}^n x_k a_k = 0\Big\}, \quad \text{dla pewnego } a \in S^{n-1}$$

   oraz zmienna $Y = \sum_{k=1}^n a_k X_k$ ma gęstość g_Y, to

$$\frac{\mathrm{vol}_{n-1}(B_\infty^n \cap E)}{\mathrm{vol}_{n-1}(B_\infty^{n-1})} = \mathrm{vol}_{n-1}\Big(\frac{1}{2}B_\infty^n \cap E\Big) = g_Y(0) = \|g_Y\|_\infty.$$

2. Załóżmy, że Y jest symetryczną zmienną losową z gęstością g. Udowodnij, że $\mathbb{E}Y^2 \geqslant \mathbb{E}U^2$, gdzie U jest zmienną o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[-(2\|g\|_\infty)^{-1}, (2\|g\|_\infty)^{-1}]$ i wywnioskuj stąd dolne oszacowanie w (1).

3. Stosując wzór na odwrócenie funkcji charakterystycznej wykaż, że gęstość w zerze zmiennej Y z zadania 1 wynosi

$$g_Y(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{a_k \neq 0}\frac{\sin(a_k t)}{a_k t}dt.$$

4. Załóżmy, że $a_k^2 \leqslant \frac{1}{2}$ dla wszystkich k. Stosując nierówność Höldera i (2) wykaż, że $g_Y(0) \leqslant \sqrt{2}$. Kiedy zachodzi równość?

5. Uzupełnij dowód (2) o przypadek gdy $a_k^2 > \frac{1}{2}$ dla pewnego k.

6. Korzystając z oszacowania Balla wykaż, że dla dużych n, jeśli $B = r_n B_2^n$, gdzie r_n jest tak dobrane by $\mathrm{vol}_n(B) = \mathrm{vol}_n(B_\infty^n)$ to

$$\mathrm{vol}_{n-1}(E \cap B_2^n) > \mathrm{vol}_{n-1}(E \cap B_\infty^n)$$

   dla dowolnej przestrzeni E wymiaru $n-1$.

Metody Losowe w Geometrii Wypukłej - zestaw X

Transformatę Legendre'a funkcji $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ określamy wzorem

$$\mathcal{L}\varphi(x) = \sup_y(\langle x, y\rangle - \varphi(x)).$$

1. Wykaż, że, jeśli K jest symetrycznym ciałem wypukłym w $\mathbb{R}^n$ i $\varphi(x) = \frac{1}{2}\|x\|_K^2$, to $\mathcal{L}\varphi(x) = \frac{1}{2}\|x\|_{K^0}^2$.

2. Udowodnij (używając nierówności Santaló) nierówność Balla - dla dowolnej funkcji parzystej wypukłej $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathcal{L}\varphi} \leqslant (2\pi)^n.$$

   Wskazówka:
   i) Dla $t, s > 0$, $\{\mathcal{L}\varphi < s\} \subset (s+t)\{\varphi < t\}^0$
   ii) Jeśli $F(t) := e^{-t}\mathrm{vol}(\{\varphi < t\})$, $G(s) := e^{-s}\mathrm{vol}(\{\mathcal{L}\varphi < s\})$ i $H(u) := \mathrm{vol}(B_2^n)e^{-u}(2u)^{n/2}$, to $H((s+t)/2) \geqslant (F(t)G(s))^{1/2}$.
   iii) Skorzystaj z ii) i nierówności Prekopy-Leindlera.

3. Pokaż, że

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\frac{1}{2}\|x\|_K^2)dx = (2\pi)^{n/2}\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}$$

   i wyprowadź z poprzedniej nierówności, nierówność Santaló.

4. Zbiór wypukły nazywamy zonoidem, jeśli jest granicą (w metryce Banacha Mazura) zonotopów. Wykaż, że jeśli Z jest zonoidem to istnieje miara symetryczna μ (zwana miarą generującą Z) na S^{n-1} taka, że

$$\|x\|_{Z^0} = \sup_{y\in K}\langle x, y\rangle = \int_{S^{n-1}} |\langle x, u\rangle| d\mu(u).$$

5. Wykaż, że dla zonoidu Z z miarą generującą μ zachodzi

$$\frac{n}{n+1}\mathrm{vol}(Z^0) = \int_{S^{n-1}}\int_{Z^0} |\langle x, y\rangle dy d\mu(x),$$

$$\mathrm{vol}(Z) = \frac{2}{n}\int_{S^{n-1}} \mathrm{vol}_{n-1}(P_{x^\perp}(Z))d\mu(x).$$

   i wywnioskuj stąd, że istnieje $x_0 \in S^{n-1}$ takie, że

$$(n+1)\mathrm{vol}(Z)\int_{Z^0} |\langle x_0, y\rangle| dy \geqslant 2\mathrm{vol}(Z^0)\mathrm{vol}_{n-1}(P_{x_0^\perp}(Z))$$

6. Załóżmy, że $p > 0$ i $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ jest takie, że $f(0) = 1$, $\int f > 0$ i $f^{1/p}$ jest wklęsła na swoim nośniku. Wykaż, że

$$\int_0^\infty tf(t)dt \leqslant \frac{p+1}{p+2}\Big(\int_0^\infty f(t)dt\Big)^2.$$

   Wywnioskuj stąd, że dla dowolnego symetrycznego ciała wypukłego K w $\mathbb{R}^n$,

$$\int_K |\langle x, y\rangle dy| \leqslant \frac{n}{2(n+1)}\frac{\mathrm{vol}(K)^2}{\mathrm{vol}_{n-1}(x^\perp \cap K)}$$

7. Wykaż, że dla dowolnego zonoidu Z, $\mathrm{vol}(Z)\mathrm{vol}(Z^0) \geqslant \frac{4^n}{n!}$.

Metody Losowe w Geometrii Wypukłej - zestaw XI

Naszkicujemy dowód twierdzenia Borela mówiącego, że jeśli μ jest miarą log-wklęsłą na $\mathbb{R}^n$, skończoną na zbiorach zwartych, to istnieje podprzestrzeń afiniczna E taka, że μ się zeruje poza E i ma log-wklęsłą gęstość na E.

Nośnikiem miary μ nazyzwamy zbór

$$\operatorname{supp}(\mu) = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu(B(x,r)) > 0 \text{ dla } r > 0\}.$$

W zadaniach 2-3 zakładamy, że μ spełnia słabszy warunek niż log-wklęsłość - mianowicie

$$\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant \min\{\mu(A), \mu(B)\} \quad \lambda \in (0,1). \tag{1}$$

1. Wykaż, że nośnik μ jest zbiorem domkniętym i miara jego uzupełnienia jest zerowa.

2. Wykaż, że warunek (1) implikuje, że nośnik μ jest zbiorem wypukłym.

   Niech E będzie najmniejszą podprzestrzenią afiniczną zawierającą $\operatorname{supp}(\mu)$, wówczas z zadania 1, μ się koncentruje na E. Dalej będziemy zakładać, że $E = \mathbb{R}^n$.

3. Korzystając z teorii miary możemy rozłożyć $\mu = \mu_a + \mu_o$, gdzie $d\mu_a = g(x)dx$ jest absolutnie ciągłą częścią μ, a μ_o częścią osobliwą. Ponadto dla p.w. (względem miary Lebesgue'a) $x \in \mathbb{R}^n$,

$$g(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\operatorname{vol}(B(x,r))} \tag{3}$$

   oraz dla dowolnego ciągu $r_n \searrow 0$ i μ_o-p.w. x,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mu(B(x,r_n))}{\operatorname{vol}(B(x,r_n))} = \infty.$$

   Udowodnij, że
   i) nośnik μ_o nie może być pełnowymiarowy,
   ii) $\mu_o = 0$.

4. Załóżmy teraz, że μ jest log-wklęsła o pełnowymiarowym nośniku. Wiemy już, że $d\mu(x) = g(x)dx$, gdzie g spełnia p.w. (2). Wykaż, że
   i) g obcięta do punktów spełniających (2) jest log-wklęsła,
   ii) zbiór x takich, że zachodzi (2) i $g(x) > 0$ jest gęsty w $\operatorname{supp}(\mu)$,
   iii) jeśli zachodzi (2) i x leży we wnętrzu $\operatorname{supp}(\mu)$, to $g(x) > 0$,
   iv) g można zmodyfikować na zbiorze miary zero do funkcji log-wklęsłej, która jest gęstością μ.

5. Niech $P_{n,k}$ będzie rzutem $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ na pierwsze k współrzednych, a μ_p rozkładem jednostajnym na $n^{1/p}B_p^n$. Zbadaj zbieżność $\mu \circ P_{n,k}^{-1}$ przy $n \to \infty$.

6. Załóżmy, że μ jest probabilistyczną miarą logwklęsłą na $\mathbb{R}^n$, a K symetrycznym ciałem wypukłym w $\mathbb{R}^n$. Dla $n = 1, 2, \ldots$ i $u \geqslant 0$ niech $P_u := \{x : u - \frac{1}{2n} < \|x\|_K < u + \frac{1}{2n}\}$. Wykaż, że
   i) $\lambda P_u + (1-\lambda)(2n)^{-1}K \subset P_{\lambda u}$,
   ii) jeśli $\mu(MK) \geqslant (1+\delta)\mu(K)$ to istnieje stała C zależna tylko od ilorazu M/δ taka, że $\mu(tK) \leqslant Ct\mu(K)$ dla $t \in (0,1)$,
   iii) jeśli $\mu(K) \leqslant b < 1$ to istnieje stała zależna tylko od b taka, że $\mu(tK) \leqslant C_b t\mu(K)$.

7. Wykaż, że dla dowolnej normy $\| \ \|$ na $\mathbb{R}^n$ i dowolnej probabilistycznej miary log-wklęsłej μ na $\mathbb{R}^n$,

$$\int \|x\| d\mu \leqslant C \exp\Big(\int \ln \|x\| d\mu(x) \Big),$$

gdzie C jest stałą uniwersalną.

Metody Losowe w Geometrii Wypukłej - zestaw XII

1. Niech X będzie zmienną losową. Dla $p \neq 0$ określamy $\|X\|_p = (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}$ przyjmując konwencję, że $\infty^a = 0$ dla $a < 0$ i $\infty^a = \infty$ dla $a > 0$. Wykaż, że
i) jeśli $\|X\|_p > 0$ dla pewnego $p > 0$, to $\mathbb{E}(\ln|X|)_+ < \infty$ oraz
$$\lim_{p\to 0+} \|X\|_p = \|X\|_0 := \exp(\mathbb{E}\ln|X|),$$
jak to jest z $\lim_{p\to 0-}$?;
ii) funkcja $p \mapsto \|X\|_p$ jest niemalejąca.

2. i) Jeśli $p > 0$ oraz $A = \|X\|_{-p} > 0$, to $\mathbb{P}(|X| \leqslant \varepsilon) \leqslant (\varepsilon/A)^p$ dla $\varepsilon > 0$.
ii) Jeśli $\mathbb{P}(|X| \leqslant \varepsilon) \leqslant (\varepsilon/A)^p$ dla $\varepsilon > 0$, to $\|X\|_{-q} \geqslant cA(\frac{p-q}{q})^{1/q} \geqslant cA(p-q)^{1/p}$ dla $0 < q < p$.

3. Załóżmy, że K jest zwartym zbiorem wypukłym w $\mathbb{R}^n$ zaś f funkcją półciągłą z góry na K. Wykaż, że zbiór
$$P_f = \Big\{\mu \text{ miara prob. logwklęsła o nośniku w } K,\ \int f d\mu \geqslant 0\Big\}$$
jest zwartym zbiorem w słabej* topologii na zbiorze miar borelowskich na K. Ponadto miara μ jest punktem ekstremalnym P_f wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci
i) $\mu = \delta_x$, $x \in K$, $f(x) \geqslant 0$,
ii) μ ma nośnik na $[a,b]$, $a \neq b$, $a, b \in K$ oraz gęstość e^l gdzie l jest afiniczną funkcją na $[a,b]$, $\int_[a,b] f d\mu = 0$ i albo $\int_[a,x] f d\mu > 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$ albo $\int_[x,b] f d\mu > 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$.

Wskazówka. Załóżmy, że μ jest punktem ekstremalnym P_f i nie jest miarą Diraca. Udowodnij, że
1. nośnik miary μ leży w przesztrzeni afinicznej wymiaru 1,
2. μ ma nośnik równy $[a,b]$ i ma logwklęsłą gęstość na $[a,b]$.
3. $\int_[a,b] f d\mu = 0$ i albo $\int_[a,x] f d\mu > 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$ albo $\int_[x,b] f d\mu > 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$.
4. logarytm gęstości μ jest funkcją afiniczną.

Metody Losowe w Geometrii Wypukłej - zestaw XIII

1. Korzystając z ogólnej formuły co-area:

$$\int_X |\nabla f| d\mu \geqslant \int_{\mathbb{R}} \mu^+(\{x\colon f(x) > r\}) dr$$

wykaż, że miara μ na $\mathbb{R}^n$ spełnia nierówność Cheegera

$$\mu^+(A) \geqslant \frac{1}{D} \min\{\mu(A), 1-\mu(A)\}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathbb{E}_\mu |f - \mathrm{Med}_\mu f| \leqslant D\mathbb{E}_\mu |\nabla f|$$

dla wszystkich lipschitzowskich funkcji f.

2. Wykaż, że nierówność Poincaré

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leqslant D^2 \mathbb{E}_\mu |\nabla f|^2, \quad f \in C^1_{\mathrm{ogr}}(\mathbb{R}^n)$$

jest równoważna nierówności

$$\mathbb{E}_\mu |f - \mathrm{Med}_\mu f|^2 \leqslant \tilde{D}^2 \int |\nabla f|^2 d\mu, \quad f \in C^1_{\mathrm{ogr}}(\mathbb{R}^n).$$

Ponadto optymalna stała w powyższej nierówności spełnia $D_{\mathrm{Poin}} \leqslant \tilde{D}_{\mathrm{opt}} \leqslant (1+\sqrt{2})D_{\mathrm{Poin}}$.

3. Udowodnij, że nierówność Cheegera na $\mathbb{R}^n$ implikuje nierówność Poincaré oraz $D_{\mathrm{Poin}} \leqslant 2D_{\mathrm{Che}}$.

4. Pokaż, że jeśli miara μ spełnia nierówność Poincaré ze stałą D, to dla każdej funkcji 1-lipschitzowskiej F i $t > 0$,

$$\mu\Big(\Big\{F \geqslant \int F d\mu + t\Big\}\Big) \leqslant 2\exp\Big(-\frac{t}{D}\Big).$$

Wskazówka. Załóż, że $\int F d\mu = 0$ i zastosuj nierówność Poincaré do $e^{\lambda F/2}$ by dostać dla $\lambda < 2/D$, $M(\lambda) \leqslant (1 - D^2\lambda^2/4)^{-1} M(\frac{\lambda}{2})^2$, gdzie $M(\lambda) = \int \exp(\lambda F) d\mu$.

5. Wykaż, że jeśli miary $\mu_1, \ldots, \mu_k$ spełniają nierówność Poincaré ze stałą D, to miara produktowa $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_k$ spełnia nierówność Poincaré ze stałą D.

6. Wykaż, że symetryczny rozkład wykładniczy ν na $\mathbb{R}$ z gęstością $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ spełnia nierówność Poincaré ze stałą 2.

7. Udowodnij, że każdy symetryczny rozkład log-wklęsły na prostej o wariancji jeden jest lipschitzowskim obrazem ν ze stałą lipschitza nie większą niż $L_0 \leqslant 4\sqrt{3}$. Wywnioskuj stąd, że dowolny produktowy symetryczny izotropowy rozkład log-wklęsły spełnia nierówność Poincaré ze stałą nie większą niż $2L_0$.