Zadania z Koncentracji Miary I

Przez λ_n oznaczamy n-wymiarową miarę Lebesgue'a, a przez σ_n unormowaną miarę powierzchniową na S^n. Jeśli μ jest miarą na (X, d), to określamy dla dowolnego zbioru A miarę wewnętrzną A,

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(C)\colon C \subset A, C \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Przypomnijmy, że dla podzbioru A przestrzeni metrycznej (X, d) i $t > 0$ określamy

$$A_t = \{x \in X\colon d(x, A) < t\}.$$

Ponadto dla miary μ na (X, d) i zbioru borelowskiego A definiujemy miarę brzegu A jako

$$\mu^+(A) = \liminf_{t\to 0+} \frac{\mu(A_t) - \mu(A)}{t}.$$

Uwagi:

1) Miarę wewnętrzną μ_* wprowadzamy, by uniknąć problemów z mierzalnością sumy zbiorów borelowskich. Daje się jednak pokazać, że suma zbiorów borelowskich, choć nie musi być borelowska jest mierzalna w sensie Lebesguea.

2) Jeśli μ miara na $\mathbb{R}^n$ z ciągłą gęstością g, a zbiór A jest porządny, to

$$\mu^+(A) = \int_{\partial A} g(x) dH_{n-1}(x),$$

zatem na przykład dla porządnych zbiorów $\lambda_n^+(A)$ to miara powierzchniowa brzegu A.

1. Wykaż, że dla dowolnych niepustych zbiorów borelowskich $A, B \subset \mathbb{R}$

$$\lambda_{1,*}(A + B) \geqslant \lambda_1(A) + \lambda_1(B)$$

2. (Nierówność Prekopy-Leindlera) Wykaż, że jeśli $s \in [0, 1]$, f, g, h są nieujemnymi funkcjami mierzalnymi na $\mathbb{R}^n$ takimi, że

$$h(sx + (1 - s)y) \geqslant f(x)^s g(y)^{1-s} \text{ dla } x, y \in \mathbb{R}^n$$

to

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx \geqslant (\int_{\mathbb{R}_n} f(x)dx)^s (\int_{\mathbb{R}_n} g(x)dx)^{1-s}$$

Wskazówki:

i) Dla $n = 1$ zauważ, że można zakładać, że $\sup_x f(x) = \sup_x g(x) = 1$ i wtedy $\int f(x)dx = \int_0^1 \lambda_1(\{f > t\})dt$, $\int g(x)dx = \int_0^1 \lambda_1(\{g > t\})dt$ oraz $\int h(x)dx \geqslant \int_0^1 \lambda_1(\{h > t\})dt$ i można stosować poprzednie zadanie.

ii) Krok indukcyjny. Ustalmy funkcje mierzalne f, g, h na $\mathbb{R}^{n+1}$ i dla $x, y \in \mathbb{R}$ rozpatrzmy funkcje $f_x(\cdot) = f(x, \cdot)$, $g_y(\cdot) = g(y, \cdot)$ i $h_{sx+(1-s)y}(\cdot) = f(sx + (1 - s)y, \cdot)$ i wykorzystajmy dla nich założenie indukcyjne.

3. (Nierówność Brunna-Minkowskiego)

i) Wykaż, że dla dowolnych niepustych zbiorów borelowskich $A, B \subset \mathbb{R}^n$ i $s \in [0, 1]$

$$\lambda_{n,*}(sA + (1 - s)B) \geqslant \lambda_n(A)^s \lambda_n(B)^{1-s}.$$

ii) Wykaż, że dla dowolnych niepustych zbiorów borelowskich $A, B \subset \mathbb{R}^n$

$$\lambda_{n,*}(A + B)^{1/n} \geqslant \lambda_n(A)^{1/n} + \lambda_n(B)^{1/n}.$$

4. (Klasyczna izoperymetria)
Wykaż, że jeśli A jest zbiorem borelowskim w $\mathbb{R}^n$ takim, że $\lambda_n(A) = \lambda_n(B(x,r))$, to
i) Dla wszystkich $t > 0$, $\lambda_n(A_t) \geqslant \lambda_n((B(x,r))_t) = \lambda_n(B(x,r+t))$.
ii) $\lambda_n^+(A) \geqslant \lambda_n^+(B(x,r)) = \lambda_{n-1}(\partial B(x,r))$.

5. Niech x_0 będzie ustalonym punktem S^n a H podprzestrzenią w $\mathbb{R}^{n+1}$ wymiaru n, nie przechodzącą przez x_0. Wówczas $\mathbb{R}^{n+1} \setminus H$ jest sumą dwóch otwartych półprzestrzeni H_+ zawierającej x_0 i H_- nie zawierającej x_0. Niech $i = i_H \colon S^n \to S^n$ będzie odbiciem względem H. Określmy dla mierzalnej, ograniczonej funkcji $f \colon S^n \to \mathbb{R}$

$$f^H(x) := \begin{cases} \max\{f(x), f(ix)\} & \text{dla } x \in H_+ \\ \min\{f(x), f(ix)\} & \text{dla } x \in H_- \\ f(x) & \text{dla } x \in H \end{cases}$$

Wykaż, że
i) $\mathrm{dist}_{\sigma_n}(f) = \mathrm{dist}_{\sigma_n}(f^H)$.
ii) Jeśli f jest Lipschitzowska ze stałą L, to f^H też jest Lipschitzowska ze stałą L.
iii) $\int_{S^n} d(x_0,x) f(x) d\sigma_n(x) \geqslant \int_{S^n} d(x_0,x) f^H(x) d\sigma_n(x)$ ponadto, jeśli f jest ciągła, to równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $f = f^H$.

6. Funkcję g na S^n nazywamy radialną (względem ustalonego punktu $x_0 \in S^n$, jeśli $d(x,x_0) \leqslant d(y,x_0)$ implikuje $g(x) \geqslant g(y)$. Jeśli $f \colon S^n \to \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną ograniczoną to jej radialną symetryzacją nazywamy funkcję radialną f^* taką, że $\mathrm{dist}_{\sigma_n}(f) = \mathrm{dist}_{\sigma_n}(f^*)$. Udowodnij, że
i) Funkcja f^* istnieje i jest jednoznacznie wyznaczona z dokładnością do zbioru miary zero.
ii) Funkcja g jest radialna wtedy i tylko wtedy gdy $g^H = g$ dla wszystkich H.

7. Ustalmy funkcję L-Lipschitzowską $f \colon S^n \to \mathbb{R}$ i niech

$$\mathcal{A} := \{g \colon S^n \to \mathbb{R} \colon \mathrm{dist}_{\sigma_n}(f) = \mathrm{dist}_{\sigma_n}(g), g \ L\text{-Lipschitzowska}\}.$$

Ponadto niech $m := \inf_{g \in \mathcal{A}} \int_{S^n} d(x_0,x) g(x) d\sigma_n(x)$. Udowodnij, że
i) Istnieje ciąg $(g_k) \subset \mathcal{A}$ jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji g taki, że $\int_{S^n} d(x_0,x) g_k(x) d\sigma_n(x) \to m$ przy $k \to \infty$ (skorzystać z twierdzenia Arzeli-Ascoli)
ii) $g \in \mathcal{A}$ oraz $m = \int_{S^n} d(x_0,x) g(x) d\sigma_n(x)$.
iii) $g = f^*$.

8. (Izoperymetria sferyczna) Wykaż, że jeśli A jest zbiorem borelowskim w S^n takim, że $\sigma_n(A) = \sigma_n(B(x_0,r))$, to
i) Dla wszystkich $t > 0$, $\sigma_n(A_t) \geqslant \sigma_n((B(x_0,r))_t) = \sigma_n(B(x_0,r+t))$.
ii) $\sigma_n^+(A) \geqslant \sigma_n^+(B(x,r))$. *Wskazówka.* Wykorzystaj fakt, że symetryzacja radialna funkcji $\max\{t - d(x,A), 0\}$ jest 1-Lipschitzowska.

9. Wykaż, że $\sigma_n(A) \geqslant \frac{1}{2}$ implikuje $1 - \sigma_n(A_t) \leqslant e^{-(n-1)t^2/2}$.

Zadania z Koncentracji Miary II

1. Miarę μ na $\mathbb{R}^n$ nazywamy *logarytmicznie wklęsłą* jeśli dla dowolnych dwu niepustych zbiorów borelowskich A, B i $s \in [0,1]$,

$$\mu_*(sA + (1-s)B) \geqslant \mu(A)^s \mu(B)^{1-s}.$$

i) Wykaż, że jeśli K jest zbiorem zwartym wypukłym o niepustym wnętrzu to rozkład jednostajny na K jest logarytmicznie wklęsły.
ii) Wykaż, że afiniczny obraz miary logarytmicznie wklęsłej jest logarytmicznie wklęsły.
iii) Wykaż, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ jest wypukła oraz miara μ ma gęstość $g = e^{-f}$, to μ jest logarytmicznie wklęsła.
iv) Wykaż, że rozkłady gaussowskie są logarytmicznie wklęsłe.
v) Wykaż, że jeśli miara logarytmicznie wklęsła μ ma ciągłą gęstość g, to g jest logarytmicznie wklęsła (tzn. jest postaci jak w punkcie ii)).

Uwaga 1. Daje się wykazać znaczne wzmocnienie v) - jeśli μ jest logarytmicznie wklęsła i nie jest skoncentrowana na podprzestrzeni afinicznej niższego wymiaru, to μ ma logarytmicznie wklęsłą gęstość.

Uwaga 2. Można wykazać, że miary probabilistyczne logarytmicznie wklęsłe to słabe granice rzutów rozkładów jednostajnych na ciałach wypukłych.

2. Wykaż, że jeśli μ jest probabilistyczną miarą logarytmicznie wklęsłą oraz A jest zbiorem symetrycznym wypukłym takim, że $\mu(A) = a > 0$, to dla $r > 1$,

$$1 - \mu(rA) \leqslant a\Big(\frac{1-a}{a}\Big)^{(r+1)/2}.$$

3. Wykaż, że jeśli X ma rozkład logarytmicznie wklęsły a $\|\cdot\|$ jest dowolną normą na $\mathbb{R}^n$ to dla $p > 1$,

$$(\mathbb{E}\|X\|^p)^{1/p} \leqslant Cp\mathbb{E}\|X\|,$$

gdzie C jest stałą absolutną.

4. Dla $\varepsilon \in (0,1)$ i miary probabilistycznej μ na (X,d) określmy

$$\alpha_\mu^\varepsilon(t) := \sup\{1 - \mu(A_t)\colon \mu(A) \geqslant \varepsilon\}.$$

Wykaż, że jeśli $\alpha_\mu(t_0) < \varepsilon$ to dla $t > 0$, $\alpha_\mu^\varepsilon(t + t_0) \leqslant \alpha_\mu(t)$.

5. Wykaż, że dla dowolnej (ustalonej) miary probabilistycznej na (X,d) i $\varepsilon > 0$ zachodzi $\alpha_\mu^\varepsilon(t) \to 0$ przy $t \to \infty$.

6. Wykaż, że jeśli φ jest funkcją L-Lipschitzowską z (X,d) w (Y,ρ) oraz $\nu = \mu \circ \varphi^{-1}$, to $\alpha_\nu^\varepsilon(t) \leqslant \alpha_\mu(t/L)$.

7. Wykaż, że transport radialny miary γ_n na rozkład jednostajny na kuli jednostkowej ma stałą Lipschitza nie większą niż $C/\sqrt{n}$.

Zadania z Koncentracji Miary III

1. Załóżmy, że wiemy, że dla mierzalnej funkcji F istnieje stała a_F taka, że

$$\mu(\{|F - a_F| \geqslant t\}) \leqslant \alpha(t) \text{ dla } t > 0.$$

Wówczas jeśli $\alpha(t_0) < 1/2$, to

$$\mu(\{|F - \mathrm{Med}_\mu(F)| \geqslant t + t_0\}) \leqslant \alpha(t) \text{ dla } t > 0.$$

Ponadto, jeśli $\bar{\alpha} = \int_0^\infty \alpha(t)dt < \infty$, to F jest całkowalna oraz $|a_F - \int F d\mu| \leqslant \bar{\alpha}$ oraz

$$\mu(\{|F - \int F d\mu| \geqslant t + \bar{\alpha}\}) \leqslant \alpha(t) \text{ dla } t > 0.$$

W szczególności jeśli $\alpha(t) \leqslant C_1 \exp(-|t|^p/C_2)$, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i $m \in \{\mathrm{Med}_\mu(F), \int F d\mu\}$

$$\mu(\{|F - m| \geqslant t)) \leqslant C_3 \exp(-(1-\varepsilon)|t|^p/C_2) \text{ dla } t > 0,$$

gdzie C_3 zależy tylko od C_1, ε i p.

2. Wykaż, że jeśli X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $a_i \leqslant X_i \leqslant b_i$ oraz $S = \sum_{i=1}^n X_i$, to

$$\mathbb{P}(S \geqslant \mathbb{E}S + t) \leqslant 2\exp(-\frac{t^2}{2D^2})$$

dla $D^2 = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2$.

3. Niech Y_i bedą niezależnymi wektorami losowymi w pewnej ośrodkowej przestrzeni Banacha oraz $S = \sum_{i=1}^n Y_i$. Wykaż, że

$$\mathbb{P}(|\|S\| - \mathbb{E}\|S\|| \geqslant t) \leqslant 2\exp(-\frac{t^2}{8D^2})$$

dla $D^2 = \sum_{i=1}^n \|Y_i\|_\infty^2$.

Zadania z Koncentracji Miary IV

1. Wykaż, że jeśli miara ν jest L-lipschitzowskim obrazem miary μ oraz μ spełnia nierówność Poincaré ze stałą C, to ν spełnia nierówność Poincaré ze stałą CL^2.

2. Niech μ będzie symnetryczną miarą logwklęsłą na $\mathbb{R}$ z gęstością $g(x)$ taką, że $\mathrm{Var}_\mu(x) = 1$.
i) Wykaż, że istnieją stałe uniwersalne C_1 i C_2 takie, że $C_1^{-1} \leqslant g(0) \leqslant C_2$ (wsk. rozpatrzeć dodatkowo $x_0 = \inf\{x > 0\colon g(x) \leqslant g(0)/e\}$.) ii) Wykaż, że istnieje stała uniwersalna L taka, że μ jest L-lipschitzowskim obrazem symetrycznej miary wykładniczej ν.

3. Przeprowadzić analogiczne rozumowanie dla miar logwklęsłych na prostej bez założenia symetrii.

4. Wykaż, że by udowodnić nierówność Poincaré dla miary μ na $\mathbb{R}^n$ wystarczy wykazać, że $\mathrm{Var}_\mu(f) \leqslant C \int |\nabla f|^2 d\mu$ dla funkcji $f \in C^1_{\mathrm{ogr}}(\mathbb{R}^n)$.

Zadania z Koncentracji Miary V

Mówimy, że miara μ na przestrzeni (X,d) spełnia *nierówność Cheegera* ze stałą $c>0$, jeśli

$$\mu^+(A) \geqslant c\min\{\mu(A), 1-\mu(A)\}$$

dla dowolnego zbioru borelowskiego A.

1. Wykaż, że nierówność Poincaré jest równoważna nierówności

   $$\mathbb{E}_\mu|f - Med_\mu f|^2 \leqslant \tilde{C}\mathbb{E}_\mu|\nabla f|^2$$

   dla wszystkich funkcji Lipschitzowskich. Co więcej optymalne stałe w obu nierównościach spełniają $C_{\mathrm{opt}} \leqslant \tilde{C}_{\mathrm{opt}} \leqslant (1+\sqrt{2})^2 C_{\mathrm{opt}}$.

2. Wykaż, że symetryczny rozkład wykładniczy ν spełnia nierówność Cheegera ze stałą $c=1$.

3. Wykaż, że miara μ spełnia nierówność Cheegera ze stałą $c>0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

   $$\mu(A) = \nu(-\infty, x] \ \Rightarrow\ \mu(A_t) \geqslant \nu(-\infty, x+ct] \text{ dla } t>0.$$

4. Niech μ będzie miarą na prostej, $F(t) = \mu(-\infty, t]$, zaś p będzie gęstością jej części absolutnie ciągłej. Wykaż, że następujące warunki są równoważne
   i) μ spełnia nierówność Cheegera ze stałą $c>0$
   ii) μ jest $\frac{1}{c}$-lipschitzowskim obrazem ν
   iii) $\operatorname{essinf}\frac{p(x)}{\min\{F(x),1-F(x)\}} \geqslant c$

5. Wykaż, że miara μ na $\mathbb{R}^n$ spełnia nierówność Cheegera ze stałą $c>0$ wtedy i tylko wtedy gdy

   $$c\mathbb{E}_\mu|f - \mathrm{Med}_\mu f| \leqslant \mathbb{E}_\mu|\nabla f|$$

   dla wszystkich lipschitzowskich funkcji f.

6. Wykaż, że nierówność Cheegera na $\mathbb{R}^n$ implikuje nierówność Poincaré ze stałą $\frac{2}{c}$.

7. Pokaż, że miara na $\mathbb{R}$ z gęstością $\frac{1+\alpha}{2}|x|^\alpha I_{\{|x|\leqslant 1\}}$ dla $\alpha \in (0,1)$ spełnia nierówność Poincaré, a nie spełnia nierówności Cheegera.

Zadania z Koncentracji Miary VI

W zadaniach poniżej $I = I_\gamma = \varphi(\Phi^{-1})$.

1. Wykaż, że
$$\int_X |\nabla f| d\mu \geqslant \int_{\mathbb{R}} \mu^+(\{x\colon f(x) > r\}) dr$$
Wskazówka: Najpierw rozpatrzeć ograniczone f, co można zredukować do przypadku $f \geqslant 0$. Rozpatrując zbiory $A(r) = \{x\colon f(x) > r\}$ i funkcje $f_t(x) = \sup_{d(x,y)<t} f(y)$ wykaż, że $\{x\colon f_t(x) > r\} = A(r)_t$ oraz, że
$$\int_X \frac{f_t - f}{t} d\mu = \int_0^\infty \frac{\mu(A(r)_t) - \mu(A(r))}{t} dr$$
i przejdź z $t \to 0+$.

2. Wykaż, że jeśli miara μ spełnia logarytmiczną nierówność Sobolewa ze stałą C, to spełnia nierówność Poincaré z tą samą stałą.

3. Wykaż, że jeśli miary μ_i spełniają nierówność Bobkowa ze stałymi C_i, to miara $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ spełnia nierówność Bobkowa ze stałą $\max_i C_i$.

4. Wykaż, że następujące dwie własności miary μ są równoważne:
i) $\mu(A_t) \geqslant \Phi(\Phi^{-1}(\mu(A)) + t)$ dla dowolnego zbioru borelowskiego A i $t > 0$
ii) $\mu^+(A) \geqslant I(\mu(A))$ dla dowolnego zbioru borelowskiego A.

5. Wykaż, że dla dowolnych liczb $a, b \in [0,1]$,
$$I\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{I^2(a) + \frac{(b-a)^2}{4}} + \frac{1}{2}\sqrt{I^2(b) + \frac{(b-a)^2}{4}}$$
i wywnioskuj stąd, że miara γ_n spełnia nierówność Bobkowa ze stałą 1.

6. Wykaż, że $I(t) \sim \sqrt{2}t\sqrt{\ln\frac{1}{t}}$ przy $t \to 0+$ i wywnioskuj stąd, że nierówność Bobkowa implikuje logarytmiczną nierówność Sobolewa.

Zadania z Koncentracji Miary VII

1. Wykaż, że jeśli para (μ, φ) ma własność (τ), to
   i) $\mu(A + B_\varphi(t)) \geqslant \frac{e^t \mu(A)}{(e^t - 1)\mu(A) + 1}$,
   ii) $\mu(A + B_\varphi(t)) > \min\{e^{t/2}\mu(A), 1/2\}$,
   iii) jeśli $\mu(A) \geqslant \frac{1}{2}$, to $1 - \mu(A + B_\varphi(t)) < e^{-t/2}(1 - \mu(A))$
   oraz
   iv) jeśli $\mu(A) = \nu(-\infty, x]$, to $\mu(A + B_\varphi(t)) \geqslant \nu(-\infty, x + t/2]$.

2. Dla miary probabilistycznej μ na $\mathbb{R}^n$ określamy

$$\Lambda_\mu(t) = \ln M_\mu(t) = \ln \int e^{\langle t, x \rangle} d\mu(x)$$

   i

$$\Lambda^*_\mu(t) = \mathcal{L}\Lambda_\mu(t) = \sup\{\langle s, t \rangle - \Lambda_\mu(s) \colon s \in \mathbb{R}^n\}.$$

   (Ogólnie $\mathcal{L}f(t) = \sup_s(\langle s, t \rangle - f(s))$ nazywamy transformatą Legendre'a funkcji f). Wykaż, że jeśli (μ, φ) ma własność (τ) oraz φ jest wypukła, to $\mathcal{L}\varphi \geqslant 2\Lambda_\mu$ oraz $\varphi(t) \leqslant 2\Lambda^*_\mu(t/2)$.

3. Udowodnij, że dla symetrycznego rozkładu wykładniczego na $\mathbb{R}$

$$\Lambda^*_\nu(t) = \sqrt{1 + t^2} - 1 - \ln\left(\frac{\sqrt{1 + t^2} - 1}{2}\right) \leqslant \min\{t^2, |t|\}.$$

   Zatem znaleziona na wykładzie funkcja kosztu dla miary ν jest optymalna z dokładnością do stałej.

4. Wykaż, że para $(\gamma_n, \frac{1}{4}|x|^2)$ ma własność (τ) oraz, że $\frac{1}{4}|x|^2$ jest optymalną funkcją kosztu.

5. Niech μ będzie symetryczną miarą logarytmicznie wklęsłą na $\mathbb{R}$ o wariancji 1. Określmy $h(x) = -\ln \mu[x, \infty)$ dla $x > 0$ oraz

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } |x| \leqslant 2/3 \\ \max\{\frac{4}{9}, h(|x|)\} & \text{dla } |x| > 2/3. \end{cases}$$

   Wykaż, że $\Lambda^*_\mu(t) \leqslant \tilde{h}(t)$ oraz para $(\mu, \tilde{h}(t/C))$ ma własność (τ) dla pewnej uniwersalnej stałej C.

Zadania z Koncentracji Miary VIII

1. Załóżmy, że zmienne Y_i są niezależne oraz $u_i \leqslant Y_i \leqslant v_i$ prawie na pewno. Niech T będzie ograiczonym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ oraz
$$Z = \sup_{t\in T} \sum_{i=1}^n t_i Y_i.$$
Wykaż, że
$$\mathbb{P}(|Z - \mathrm{Med}(Z)| \geqslant t) \leqslant 4\exp(-\frac{t^2}{4\sigma^2}),$$
gdzie
$$\sigma^2 = \sup_{t\in T} \sum t_i^2 (v_i - u_i)^2.$$
Ponadto $\mathbb{E}|Z - \mathrm{Med}(Z)| \leqslant 4\sqrt{\pi}\sigma$ i $\mathrm{Var}(Z) \leqslant 16\sigma^2$.

2. (Nierówność Chinczyna-Kahane'a) Niech ε_i będą niezależnymi symetrycznymi zmiennymi takimi, że $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$, zaś $v_1, \ldots, v_n$ wektorami w pewnej przestrzeni unormowanej F. Wykaż, że dla $M = \mathrm{Med}(\|\sum_{i=1}^n v_i\varepsilon_i\|)$ i $t > 0$
$$\mathbb{P}(|\|\sum_{i=1}^n v_i\varepsilon_i\| - M| \geqslant t) \leqslant 4\exp(-\frac{t^2}{16\sigma^2}),$$
gdzie
$$\sigma^2 = \sup\{\sum \varphi^2(v_i) \colon \varphi \in F^*, \|\varphi\| \leqslant 1\}.$$
Wywnioskuj stąd, że istnieje stała $C < \infty$ taka, że dla dowolnego $p \geqslant 1$,
$$(\mathbb{E}\|\sum_{i=1}^n v_i\varepsilon_i\|^p)^{1/p} \leqslant M + C\sqrt{p}\sigma$$
oraz
$$(\mathbb{E}\|\sum_{i=1}^n v_i\varepsilon_i\|^p)^{1/p} \leqslant \tilde{C}\sqrt{p}(\mathbb{E}\|\sum_{i=1}^n v_i\varepsilon_i\|^2)^{1/2}.$$

3. (Zmodyfikowana nierówność Sobolewa). Niech ν oznacza symetryczny rozkład wykładniczy na $\mathbb{R}$, tzn. rozkład z gęstością $\frac{1}{2}e^{-|x|}$.
i) Wykaż, że dla dowolnej funkcji gładkiej f na $\mathbb{R}$ takiej, że $|f'| \leqslant \rho < 1$ zachodzi
$$\mathrm{Ent}_\nu(e^f) \leqslant \frac{2}{1-\rho}\int (f')^2 e^f d\nu.$$
ii) Udowodnij, że jeśli funkcja $F \in C^1(\mathbb{R}^n)$ spełnia $\max_i |\partial_i F| \leqslant 1$ to dla $|\lambda| \leqslant \rho < 1$,
$$\mathrm{Ent}_{\nu^n}(e^{\lambda F}) \leqslant \frac{2\lambda^2}{1-\rho}\int \sum_{i=1}^n (\partial_i F)^2 e^{\lambda F} d\nu^n.$$
iii) Wywnioskuj stąd, że jeśli $F \in C^1(\mathbb{R}^n)$ spełnia
$$\max_i |\partial_i F| \leqslant b \text{ oraz } \sum_{i=1}^n (\partial_i F)^2 \leqslant a^2$$
to
$$\nu^n(\{F \geqslant \int F d\nu^n + t\}) \leqslant \exp(-\frac{1}{4}\min\{\frac{t}{b}, \frac{t^2}{a^2}\}).$$

Zadania z Koncentracji Miary IX

Ciałem wypukłym nazywamy zwarty wypukły podzbiór $\mathbb{R}^n$ o niepustym wnętrzu.

1. Wykaż, że $\mathbb{E}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|g_i| \geqslant c\sqrt{\ln(n+1)}$.
2. Wykaż, że jeśli K jest symetrycznym ciałem wypukłym w $\mathbb{R}^n$ oraz $\varepsilon > 0$ to istnieje podprzestrzeń V wymiaru $c(\varepsilon)\log n$ oraz elipsoida $\mathcal{E}$ w V taka, że
$$\mathcal{E} \subset K \cap V \subset (1+\varepsilon)\mathcal{E}.$$
3. Wykaż, że każda n wymiarowa elipsoida ma $\lceil \frac{n}{2} \rceil$-wymiarowy przekrój, który jest kulą euklidesową.
4. Wykaż, że jeśli K jest symetrycznym ciałem wypukłym w $\mathbb{R}^n$ oraz $\varepsilon > 0$ to istnieje podprzestrzeń V wymiaru $c(\varepsilon)\log n$ oraz $\rho > 0$ takie, że
$$\rho B_V \subset K \cap V \subset (1+\varepsilon)\rho B_V,$$
gdzie $B_V = \{x \in V\colon |x| = 1\}$.
5. Wykaż, że jeśli l_2^k się wkłada ze stałą C w l_p^n oraz $p \geqslant 2$, to $k \leqslant A(C)pn^{2/p}$, gdzie $A(C)$ jest stałą zależną tylko od C.
6. Wykaż, że jeśli l_2^k się wkłada ze stałą C w l_∞^n, to $k \leqslant A(C)\log n$.
7. Oblicz $d(l_p^n)$. Co można powiedzieć o wymiarze przekrojów kuli jednostkowej w l_p^n, które są bliskie euklidesowym?

Zadania z Koncentracji Miary X

1. Wykaż, że $\int_x^\infty e^{-y^2/2}dy \sim \frac{1}{x}e^{-x^2/2}$ dla $x \to \infty$ i wykorzystaj to do dowodu faktu, że dla $X \sim \mathcal{N}(a,\sigma^2)$, $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2}\log \mathbb{P}(X \geqslant t) = -\frac{1}{2\sigma^2}$.

2. Niech X będzie scentrowanym wektorem gaussowskim w ośrodkowej przestrzeni Banacha F. Wykaż, że istnieją wektory $x_1, x_2, \ldots$ w F oraz zmienne $g_1, g_2, \ldots$ o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$ takie, że $X = \sum_{i=1}^\infty x_i g_i$, przy czym szereg jest zbieżny p.n. i w każdym L^p. Jak się zmieni odpowiedź, jeśli nie założymy scentrowania X?
   Wskazówka. Rozpatrzyć domkniętą powłokę liniową wektorów $(\varphi(X))_{\varphi\in F^*}$ w L^2. Za g_i można wziąć bazę ortonormalną tej przestrzeni Hilberta.

3. Załóżmy, że $g_i, \tilde{g}_j$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$ oraz $X = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} g_i \tilde{g}_j$. Wykaż, że

$$i) \qquad \mathbb{P}(|X| \geqslant C(\sqrt{t}\|(a_{ij})\|_{\mathrm{HS}} + t\|(a_{ij})\|_{\mathrm{op}})) \leqslant 2e^{-t},$$

   gdzie

$$\|(a_{ij})\|_{\mathrm{op}} = \sup\{\sum_{ij} a_i j x_i y_j \colon \sum_i x_i^2 \leqslant 1, \sum_j y_j^2 \leqslant 1\}$$

   oraz

$$\|(a_{ij})\|_{\mathrm{HS}} = (\sum_{ij} a_{ij}^2)^{1/2}.$$

   ii) $\|X\|_p \leqslant C(\sqrt{p}\|(a_{ij})\|_{\mathrm{op}} + p\|(a_{ij})\|_{\mathrm{HS}})$ dla $p \geqslant 2$.
   iii) $\|X\|_p \leqslant Cp\|X\|_2$ dla $p \geqslant 2$.

4. Niech $Y_1, \ldots, Y_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie z gęstością $\frac{1}{2}e^{-|x|}$. Wykaż, że dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ oraz $Y = \sum_{i=1}^n a_i Y_i$,

$$\mathbb{P}(Y \geqslant C(t\|a\|_\infty + \sqrt{t}\|a\|_2)) \leqslant e^{-t}$$

   i wywnioskuj stąd, że $\|Y\|_p \leqslant C(p\|a\|_\infty + \sqrt{p}\|a\|_2)$ dla $p \geqslant 2$. Wykaż, że $\|Y\|_p \geqslant \frac{1}{C}(p\|a\|_\infty + \sqrt{p}\|a\|_2)$ dla $p \geqslant 2$.

5. Niech $Y = \sum_{i=1}^n v_i Y_i$ gdzie v_i są wektorami w pewnej przestrzeni Banacha F, a Y_i są jak w poprzednim zadaniu. Wykaż, że

$$\mathbb{P}(\|Y\| \geqslant \mathbb{E}\|Y\| + C(t \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} \|(\varphi(v_i)\|_\infty + \sqrt{t} \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} \|(\varphi(v_i)\|_2)) \leqslant e^{-t}$$

   i wywnioskuj stąd, że dla $p \geqslant 2$,

$$(\mathbb{E}\|Y\|^p)^{1/p} \leqslant \mathbb{E}\|Y\| + C(p \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} \|(\varphi(v_i)\|_\infty + \sqrt{p} \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} \|(\varphi(v_i)\|_2)$$

   oraz

$$(\mathbb{E}\|Y\|^p)^{1/p} \leqslant \mathbb{E}\|Y\| + \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} (\mathbb{E}|\varphi(Y)|^p)^{1/p}.$$

Zadania z Koncentracji Miary XI

W zadaniach tej serii zakładamy, że

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

gdzie X_i są niezależnymi, ograniczonymi zmiennymi losowymi o średniej zero.

1. **Nierówność Hoeffdinga.** Wykaż, że

$$\mathbb{P}(S \geqslant t) \leqslant \exp\Big(- \frac{t^2}{2\sum_{i=1}^n \|X_i\|_\infty^2}\Big)$$

2. **Nierówność Bernsteina.** Udowodnij, że
i) jeśli liczby $\sigma_i^2, M < \infty$ są takie, że

$$\mathbb{E}|X_i|^k \leqslant \frac{k!}{2}\sigma_i^2 M^{k-2} \text{ dla } k \geqslant 2,$$

to

$$\mathbb{E}\exp(\lambda S) \leqslant \exp\Big(\frac{\lambda^2 \sum_{i=1}^n \sigma_i^2}{2(1 - M|\lambda|)}\Big) \text{ dla } M|\lambda| < 1$$

oraz dla $t > 0$,

$$\mathbb{P}(S \geqslant t) \leqslant \exp\Big(- \frac{t^2}{2\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2Mt}\Big),$$

ii) jeśli $|X_i| \leqslant C$, to

$$\mathbb{P}(S \geqslant t) \leqslant \exp\Big(- \frac{t^2}{2\mathrm{Var}(S) + \frac{2}{3}Ct}\Big).$$

3. **Nierówność Benetta.** Wykaż, że jeśli $|X_i| \leqslant C$, to dla $\lambda > 0$

$$\mathbb{E}\exp(\lambda S) \leqslant \exp\Big(\frac{\mathrm{Var}(S)}{C^2}(e^{\lambda C} - tC - 1)\Big)$$

oraz dla $t \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(S \geqslant t) \leqslant \exp\Big(- \frac{\mathrm{Var}(S)}{C^2} h\Big(\frac{Ct}{\mathrm{Var}(S)}\Big)\Big) \leqslant \exp\Big(- \frac{t}{2C}\ln\Big(1 + \frac{tC}{\mathrm{Var}(S)}\Big)\Big),$$

gdzie $h(x) := (1+x)\ln(1+x) - x$ dla $x \geqslant 0$.

4. Rozpatrując jako przypadki graniczne zmienne o rozkładzie gaussowskim i Poissona, przedyskutuj optymalność oszacowania w nierówności Bennetta.

Zadania z Koncentracji Miary XII

1. Załóżmy, że $\varphi_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$ są funkcjami 1-lipschitzowskimi oraz $\varphi_i(0) = 0$. Wykaż, że dla dowolnego ograniczonego $T \subset \mathbb{R}^n$ oraz funkcji wypukłej niemalejącej $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}G\Big(\sup_{t\in T}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\varphi_i(t_i)\Big) \leqslant \mathbb{E}G\Big(\sup_{t\in T}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i t_i\Big).$$

Wskazówka. Sprowadzić zadanie do wykazania, że dla ograniczonego zbioru $T \subset \mathbb{R}^2$ i funkcji 1-lipschitzowskiej φ takiej, że $\varphi(0) = 0$ zachodzi

$$\mathbb{E}G\Big(\sup_{t\in T}(t_1 + \varepsilon_1\varphi(t_2))\Big) \leqslant \mathbb{E}G\Big(\sup_{t\in T}(t_1 + \varepsilon_1 t_2)\Big).$$

Następnie zredukować do zbioru dwupunktowego T i rozpatrzyć przypadki

2. Przy założeniach poprzedniego zadania udowodnij, że dla dowolnej funkcji wypukłej niemalejącej $F\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$,

$$\mathbb{E}F\Big(\frac{1}{2}\sup_{t\in T}\Big|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\varphi_i(t_i)\Big|\Big) \leqslant \mathbb{E}F\Big(\sup_{t\in T}\Big|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i t_i\Big|\Big).$$

3. Załóżmy, że wektory losowe X_i w pewnej ośrodkowej przestrzeni Banacha są scentrowane, wspólnie ograniczone oraz szereg $S = \sum_{i=1}^{\infty} X_i$ jest zbieżny prawie na pewno. Wykaż, że istnieje $\lambda > 0$ takie, że $\mathbb{E}\exp(\lambda\|S\|\log^{+}\|S\|) < \infty$.