Zestaw 1

1. Wykaż, że dla $x \geqslant 0$
$$T(x) = 1 - \phi(x) \leqslant \frac{1}{2}e^{-x^2/2}.$$

2. Wykaż, że wektor losowy $\mathcal{N}(a, C)$ ma gęstość wtedy i tylko wtedy gdy macierz kowariancji C jest odwracalna i znajdź tę gestość kiedy istnieje.

3. Podaj przykład zmiennych losowych X, Y o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$ takich, że $\mathrm{C}ov(X, Y) = 0$, ale X i Y nie są niezależne.

4. Udowodnij, że odwzorowanie $(a_i) \to \sum a_i g_i$ definiuje izometrię z l_2 w $L^p(\Omega)$.

5. Wykaż, że odwzorowanie $f \to \int_0^1 f(s)dW_s$ jest izometrią z $L^2[0, 1]$ w $L^p(\Omega)$.

6. Udowodnij, że $\mathbb{E}\sup_n \frac{|g_n|}{\sqrt{\ln n}} < \infty$ oraz jeśli $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{\sqrt{\ln n}} = 0$, to $\sup_n \frac{|g_n|}{c_n} = \infty$ p.n.

7. Oblicz $\gamma(p) := (\mathbb{E}|g|^p)^{1/p}$ i wykaż, że dla $p \geqslant 2$ $c\sqrt{p} \leqslant \gamma(p) \leqslant C\sqrt{p}$ dla pewnych stałych uniwersalnych $0 < c < C < \infty$.

W kolejnych zadaniach E oznacza ośrodkową przestrzeń Banacha

8. Wykaż, że istnieją funkcjonały $f_1, f_2, \ldots$ z kuli jednostkowej E^* takie, że $\|x\| = \sup_n f_n(x)$ dla wszystkich $x \in E$.

9. Wykaż, że jeśli $X\colon (\Omega, \mathcal{F}) \to E$ jest takie, że $f(X)$ jest mierzalne dla wszystkich $f \in E^*$, to X jest mierzalne.

10. Wykaż, że jeśli $X, Y\colon (\Omega, \mathcal{F}) \to E$ są mierzalne, to $X + Y$ też jest mierzalne.

11. Wykaż, że jeśli zmienne losowe X i Y są takie, że dla wszystkich $f \in E^*$, $f(X)$ ma ten sam rozkład co $f(Y)$, to X i Y mają ten sam rozkład. Wywnioskuj stąd, że funkcja charakterystyczna $\varphi_X(f) = \mathbb{E}e^{if(X)}$, $f \in F^*$ wyznacza rozkład X.

Zestaw 2

1. Niech $X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ będzie procesem gaussowskim o ciągłych trajektoriach. Wykaż, że X traktowany jako wektor losowy w $C([0,1])$ jest zmienną gaussowską. Podobnie jeśli $C([0,1])$ zastąpimy przez $L^p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$.

2. Niech H będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta. Wykaż, że istnieje zmienna X o funkcji charakterystycznej
$$\varphi_X(f) := \mathbb{E}e^{i\langle t,X\rangle} = e^{-|t|^2/2},\ t \in H$$
wtedy i tylko wtedy gdy $\dim H < \infty$.

3. Wykaż, że istnieją stałe uniwersalne $0 < c < C < \infty$ takie, że $c\sqrt{\ln(n+1)} \leqslant \mathbb{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|g_k| \leqslant C\sqrt{\ln(n+1)}$.

4. Dla zmiennej losowej X określamy $\|X\|_p = (\mathbb{E}\|X\|^p)^{1/p}$. Wykaż, że funkcja $p \to \ln\|X\|_{1/p}$ jest wypukła.

5. Wykaż, że jeśli dla pewnego $p > q > 0$, $\|X\|_p \leqslant C\|X\|_q$ to dla dowolnych $p \geqslant \tilde{p} > \tilde{q} > 0$ istnieje stała $\tilde{C}$ zależna tylko od $p, \tilde{p}, q, \tilde{q}$ i C taka, że $\|X\|_{\tilde{p}} \leqslant \tilde{C}\|X\|_{\tilde{q}}$.

6. Niech $(U, \mathcal{U}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą nieujemną μ, a $\alpha: X \to E$ funkcją mierzalną o wartościach w ośrodkowej przestrzeni Banacha E taką, że $\int_U \|\alpha(x)\|d\mu(x) < \infty$. Wykaż, że istnieje dokładnie jeden wektor $S \in E$ taki, że $f(S) = \int f(\alpha(x))d\mu(x)$ dla wszystkich $f \in E^*$. Definiujemy $S = \int_U \alpha(x)d\mu(x)$, pokaż, że tak zdefiniowana całka jest liniowa oraz $\| \int_U \alpha(x)d\mu(x)\| \leqslant \int_U \|\alpha(x)\|d\mu(x)$

7. Niech (E, d) będzie przestrzenią polską (tzn. metryczną, zupełną i ośrodkową). Wyka,że, że rodzina miar probabilistycznych μ_i jest relatywnie słabo zwarta wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty K taki, że $\mu_i(K) > 1 - \varepsilon$ dla wszystkich i.

8. Niech X_i będzie ciągiem niezależnych wektorów losowych w ośrodkowej przestrzeni Banacha E oraz $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:
i) S_n jest zbieżny p.n.;

ii) S_n jest zbieżny według prawdopodobieństwa;
iii) S_n jest zbieżny według rozkładu;
iv) Istnieje zmienna losowa S taka, że dla dowolnego $f \in E^*$, $f(S_n)$ jest zbieżny według rozkładu do $f(S)$.

9. Wykaż, że poprzednie twierdzenie zachodzi również bez założenia symetrii X_i.

10. Skonstruuj przykład niezależnych symetrycznych zmiennych losowych X_i takich, że ciąg $f(S_n)$ jest zbieżny według rozkładu dla każdego $f \in E^*$, ale nie spełnione są warunki i)-iv).

Zestaw 3

1. Niech $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1. Wykaż, że f jest Lipschitzowska ze stałą L wtedy i tylko wtedy gdy $|\nabla f(x)| \leqslant L$ dla wszystkich x.

2. Wykaż, że dla dowolnej funkcji L-Lipschitzowskiej $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja L-Lipschitzowska g klasy C^1 taka, że $\|f - g\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

3. Niech X będzie wektorem losowym o wartościach w ośrodkowej przestrzeni Banacha E takim, że $\mathbb{E}\|X\|^p < \infty$. Wykaż, że podprzestrzeń L^p będąca domknięciem $\{f(X)\colon f \in E^*\}$ jest ośrodkowa.

4. Niech W będzie procesem Wienera na $[0,1]$, a $\mathcal{H}_W = \overline{\{f(W) : f \in (C[0,1])^*\}}$. Wykaż, że przekształcenie $h \to \int_0^1 h(t)dW_t$ wyznacza izometrię $L^2[0,1]$ w $\mathcal{H}_W$.

5. Niech $X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ będzie scentrowanym procesem gaussowskim o trajektoriach ciągłych i funkcji kowariancji K. Rozważmy przestrzenie $\mathcal{H}_X = \overline{\{f(X) : f \in (C[0,1])^*\}}$ oraz $\mathcal{H}_K$ będącą uzupełnieniem L^1 względem normy euklidesowej zadanej przez iloczyn skalarny $\langle f, g\rangle := \int_0^1 \int_0^1 K(t,s)f(s)g(t)dsdt$. Wykaż, że obie te przestrzenie są w naturalny sposób izometryczne. Niech f_i będzie bazą ortonormalną $\mathcal{H}_K$ oraz $h_i(s) = \int_0^1 K(t,s)f_i(t)dt$. Wykaż, że szereg $\sum_{i=1}^\infty g_i h_i$ jest pn zbieżny w $C[0,1]$ i jego granica ma taki sam rozkład jak X.

6. Znajdź kulę Camerona Martina dla d wymiarowego wektora gaussowskiego $\mathcal{N}(0,C)$.

Zestaw 4

1. Niech μ będzie miarą probabilistyczną na $\mathbb{R}^n$. Wykaż, że jeśl nierówność Bobkowa
$$I(\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{I^2(f) + |\nabla f|^2} d\mu$$
zachodzi dla dowolnej funkcji $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ klasy C^∞ o nośniku zwartym, to zachodzi dla dowolnej funkcji klasy C^1.

2. Wykaż, że dla dowolnego borelowkskiego zbioru A w $\mathbb{R}^n$ oraz $\delta, h > 0$ istnieje $1/h$-Lipschitzowska funkcja f klasy C^∞ taka, że $f = 1$ na $A_{\delta/4}$, $f = 0$ poza $A_{\delta+h}$ oraz $0 \leqslant f \leqslant 1$.

3. Wykaż, że dla dowolnej funkcji ograniczonej klasy $C^1(\mathbb{R})$ i dowolnej miary nieujemnej absolutnie ciągłej μ zachodzi
$$\int_{\mathbb{R}} |f'(x)| d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \mu^+(f \geqslant s) ds.$$

4. Wykaż, że dla dowolnej funkcji ograniczonej klasy $C^1(\mathbb{R}^n)$ i dowolnej miary nieujemnej absolutnie ciągłej μ zachodzi
$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \mu^+(f \geqslant s) ds.$$

5. Niech μ będzie absolutnie ciągłą miarą nieujemną na $\mathbb{R}^n$, skończoną na zbiorach zwartych. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:
i) Dla dowolnego zbioru ograniczonego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mu^+(A) \geqslant c(\mu(A))^{(n-1)/n}$;
ii) Dla dowolnej funkcji $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ o nośniku zwartym, $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f| d\mu \geqslant (\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{n/n-1})^{(n-1)/n}$.

6. Niech μ będzie miarą probabilistyczną na przestrzeni metrycznej (X, d), zaś α pewną funkcją na $\mathbb{R}_+$. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:
i) $\mu(A_t) \geqslant \alpha(t)$ dla $\mu(A) \geqslant 1/2$, $t > 0$;
ii) $\mu(f < Med_\mu(f) + Lt) \geqslant \alpha(t)$ dla L-Lipschitzowskich funkcji $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ i $t > 0$;
iii) $\mu(f > Med_\mu(f) - Lt) \geqslant \alpha(t)$ dla L-Lipschitzowskich funkcji $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ i $t > 0$.

7. Dla miary probabilistycznej μ na przestrzeni metrycznej X określamy dla $t, h > 0$

$$\mathrm{Is}_\mu(t) := \inf\{\mu^+(A)\colon A \in \mathcal{B}(X), \mu(A) = t\}$$

oraz

$$R_\mu(t,h) := \inf\{\mu(A_h)\colon A \in \mathcal{B}(X), \mu(A) \geqslant t\}$$

Niech (X, d) i (Y, ρ) będą przestrzeniami metrycznymi, zaś $T\colon X \to Y$ przekształceniem nierozszerzającym tzn. $\rho(Tx, Ty) \leqslant d(x, y)$. Niech μ będzie miarą probabilistyczną na X, zaś ν jej obrazem przy T tzn. $\nu(A) := \mu(T^{-1}A)$ dla $A \in \mathcal{B}(Y)$. Wykaż, że $\mathrm{Is}_\nu \geqslant \mathrm{Is}_\mu$ oraz $R_\nu \geqslant R_\mu$.

8. Wykaż, że istnieje nierozszerzające przekształcenie $\mathbb{R}^n$ na $[0, \sqrt{2\pi}]^n$, które przeprowadza miarę gaussowską γ_n na rozkład jednostajny μ na $[0, \sqrt{2\pi}]^n$. Wywnioskuj stąd, że $\mu^+(A) \geqslant I(\mu(A))$. Jak oszacować funkcję izoperymetryczną rozkładu jednostajnego na $[0,1]^n$?

Zestaw 5

1. Niech X będzie wektorem gaussowskim w ośrodkowej przestrzeni Banacha, $M = \mathrm{Med}(\|X\|)$, $\sigma^2 = \sup_{\|f\|\leqslant 1} \mathrm{Var} f(X)$. Udowodnij, że dla $p > 0$,
$$\|X\|_p \leqslant M + C_p\sigma,$$
gdzie c_p stała zależna tylko od p oraz $c_p \leqslant C\sqrt{p}$ dla $p \geqslant 2$. Ponadto M można zastąpić przez $\|X\|_1$.

2. Wykaż, że dla symetrycznych wektorów gaussowskich i $p > 0$ $\|X\|_p \leqslant C_p M$. Co więcej dla $\alpha \in (0,1)$ i $p > 0$ istnieje stała $C_{p,\alpha}$ zależna tylko od p i α taka, że $\|X\|_p \leqslant C_{p,\alpha} M_\alpha$, gdzie $M_\alpha := \inf\{t > 0\colon \Pr(\|X\| \geqslant t) \leqslant \alpha\}$.

3. Udowodnij, że przy oznaczeniach z poprzedniego zadania $|\mathbb{E}\|X\| - M| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma$.

4. Niech $(X_t)_{t\in T}$ będzie procesem gaussowskim indeksowanym przez przeliczalny zbiór T. Określmy $M = \mathrm{Med}(\sup_{t\in T} X_t)$, $\sigma = \sup_{t\in T} \mathrm{Var}(X_t)$. Wykaż, że dla $u > 0$
$$\Pr(\sup_{t\in T} X_t \geqslant M + u\sigma) \leqslant 1 - \Phi(u).$$

5. Niech $S = \sum_{i<j}^{n} a_{ij} g_i g_j$. Wykaż, że dla pewnej stałej uniwersalnej K i wszystkich $t > 0$ zachodzi $\Pr(S \geqslant \sqrt{t}\|a_{ij}\|_{HS} + t\|a_{ij}\|) \leqslant Ke^{-t/K}$ oraz $\frac{1}{K}(\sqrt{p}\|a_{ij}\|_{HS} + p\|a_{ij}\|)) \leqslant \|S\|_p \leqslant K(\sqrt{p}\|a_{ij}\|_{HS} + p\|a_{ij}\|))$, gdzie $\|a_{ij}\|_{HS} := (\sum a_{ij}^2)^{1/2}$ oraz $\|a_{ij}\| := \sup\{\sum a_{ij}x_i y_j\colon \sum x_i^2 \leqslant 1, \sum y_j^2 \leqslant 1\}$.

6. Udowodnij, że dla $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje N takie, że dla $n \geqslant N$ $\gamma_n(x \in \mathbb{R}^n\colon \gamma_{(n+1,\infty)}(A_x) \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]) \leqslant \varepsilon$, gdzie $A_x := \{y\colon (x,y) \in A\}$.

7. Udowodnij, że dla $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$, $(\gamma_\infty)_*(A_t) \geqslant \Phi(\Phi^{-1}(\gamma_\infty(A)) + t)$.

Zestaw 6

1. Wykaż, że $I(t) = t\sqrt{2\ln\frac{1}{t} + \ln\ln\frac{1}{t} + \ln 4\pi} + o(t(\ln\frac{1}{t})^{-1/2})$ przy $t \to 0+$ i wywnioskuj stąd, że dla $0 \leqslant \alpha \leqslant A < \infty$, $I(at) = aI(t) + a\log\frac{1}{a}t(2\ln\frac{1}{t})^{-1/2} + o_A(t(\ln\frac{1}{t})^{-1/2})$ przy $t \to 0+$.

2. Wykaż, że nierówność Bobkowa ze stałą C implikuje nierówność logarytmiczną Sobolewa ze stałą C^{-2}.

3. Dla funkcji f na przestrzeni probabilistycznej $(X, \mathcal{F}, \mu)$ określamy $\mathrm{Var}_\mu(f) := \int f^2 d\mu - (\int f d\mu)^2$ o ile $\int f^2 d\mu < \infty$. Wykaż, że jeśli miara μ jest produktem miar probabilistycznych $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_k$ to dla dowolnego $f \in L^2(\mu)$
$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \int \mathrm{Var}_{\mu_i}(f) d\mu.$$

4. Mówimy, że miara probabilistyczna μ na $\mathbb{R}^n$ spełnia nierówność Poincaré ze stałą C, jeśli dla dowolnego $f \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mu)$ zachodzi
$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leqslant C \int |\nabla f|^2 d\mu.$$
Wykaż, że jeśli miary μ_i spełniają nierówność Poincaré ze stałymi C_i to miara $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_k$ spełnia nierówność Poincaré ze stałą $C = \max(C_1, \ldots, C_k)$.

5. Wykaż, że nierówność logarytmiczna Sobolewa ze stałą C implikuje nierówność Poincaré ze stałą C.

6. (układ Hermite'a) Niech dla $k = 0, 1, \ldots$
$$h_k(x) := \frac{(-1)^k}{\sqrt{k!}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^k}{dx^k} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$
Wykaż, że
a) funkcje h_k tworzą bazę ortonormalną $L^2(\gamma_1)$;
b) h_k jest parzyste dla parzystych k i nieparzyste dla nieparzystych k;
c) $h_k'(x) = \sqrt{k}h_{k-1}(x) = xh_k(x) - \sqrt{k+1}h_{k+1}(x)$;
d) $\int f' h_h d\gamma_1 = \sqrt{k+1} \int f h_{k+1}$;
e) $\int f h_h d\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{k!}} \int f^{(k)} d\gamma_1$.

7. Dla $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ oraz $x \in \mathbb{R}^n$ określamy $H_k(x) := h_{k_1}(x_1) \cdots h_{k_n}(x_n)$. Wykaż, że funkcje H_k tworzą bazę ortonormalną $L^2(\gamma_n)$.

8. Udowodnij, że miara γ_n spełnia nierówność Poincaré ze stałą 1, używając rozwinięcia w układzie Hermite'a.

Zestaw 7

1. Wykaż, że nierówność Ehrharda dla γ_n implikuje nierówność Ehrharda dla dowolnej miary gaussowskiej μ.

2. Wykaż, że jeśli $\lambda \in (0,1)$, a $f, g, h: \mathbb{R}^n \mapsto [0,1]$ są funkcjami borelowskimi takimi, że
$$\forall_{x,y}\ \Phi^{-1}(h(\lambda x + (1-\lambda)y)) \geqslant \lambda\Phi^{-1}(f(x)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(g(y)),$$
to
$$\Phi^{-1}(\int h d\gamma_n) \geqslant \lambda\Phi^{-1}(\int f d\gamma_n) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\int g d\gamma_n).$$
(przyjmujemy umowę, że $-\infty + \infty = -\infty$)

3. Wykaż, że miary gaussowskie są logarytmicznie wklęsłe tzn
$$\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant \mu(A)^\lambda \mu(B)^{1-\lambda}.$$

4. Wykaż, że dla dowolnego wektora gaussowskiego X zachodzi $\mathbb{E}\|X\| \geqslant \mathrm{Med}(\|X\|)$. Wskazówka: wykorzystując fakt, że funkcja $\Phi^{-1}(\Pr(\|X\| \leqslant t))$ jest wklęsła, wykaż, że istnieje $a > 0$ takie, że $\Pr(\|X\| \geqslant t) \leqslant \Phi(a(t-M))$.

5. Wykaż, że dla $t > 0$ i $k = 1, 2, \ldots$
$$\lim_{\lambda\to 0+} \lambda\Phi^{-1}(\gamma_k(B(0, \lambda^{-1}t))) = t$$
i wywnioskuj stąd, że nierówność Ehrharda implikuje nierówność izoperymetryczną.

6. (Symetryzacja Ehrharda) Niech E będzie k-wymiarową podprzestrzenią $\mathbb{R}^n$, zaś $u \in S^{n-1} \cap E$. Dla dowolnego zbioru domkniętego A definiujemy zbiór $B = T(E,u)(A)$ spełniający dwa warunki:
i) $\forall_{x\in E^\perp}\ B \cap (x+E) = H_x \cap (x+E)$ dla pewnej domkniętej półprzestrzeni afinicznej H_x w kierunku u (tzn. $H_x = \{y: \langle y, u\rangle \leqslant f(x)\}$, $f: E^\perp \mapsto [-\infty, \infty]$).
ii) $\forall_{x\in E^\perp}\ \gamma_{k,x+E}(B \cap (x+E)) = \gamma_{k,x+E}(A \cap (x+E))$, gdzie $\gamma_{k,x+E}(C) = \gamma_k(C - x)$ dla $C \subset x + E$.
Wykaż, że

a) B jest zbiorem domkniętym;
b) $\gamma_n(B) = \gamma_n(A)$;
c) $\gamma_n(B_t) \leqslant \gamma_n(A_t)$ dla $t > 0$ oraz $\gamma_n^+(B) \leqslant \gamma_n^+(A)$;
d) jeśli A jest zbiorem wypukłym to B jest również wypukłe.

Zestaw 8

1. Niech μ będzie probabilistyczną miarą logarytmicznie wklęsłą, a K zbiorem wypukłym symetrycznym z $\mu(K) = \theta$. Wykaż, że dla $t > 1$,

$$1 - \mu(tK) \leqslant \theta(\frac{1-\theta}{theta})^{(1+t)/2}.$$

Wywnioskuj stąd, że jeśli rozkład wektora X jest logarytmicznie wklęsły to dla $p \geqslant 1$, $\|X\|_p \leqslant Cp\|X\|_1$, gdzie C jest stałą uniwersalną.

2. Wykaż, że dla $a < 1$ istnieje stała C_a taka, że przy założeniach poprzedniego zadania dla $\mu(K) \leqslant a$,

$$\mu(tK) \leqslant C_a t \mu(K).$$

Wywnioskuj stąd, że dla $p, q > -1$ istnieje stała $C(p, q)$ taka, że dla wektorów X o logarytmicznie wklęsłym rozkładzie, $\|X\|_p \leqslant C(p, q)\|X\|_q$.

3. Niech K będzie symetrycznym zbiorem wypukłym w $\mathbb{R}^n$, zaś $w(K) := \sup\{r \geqslant 0: B(0, r) \subset K\}$. Wykaż, że jeśli $\gamma_n(K) \leqslant 1/2$, to

$$\gamma_n(tK) \leqslant t^{\frac{\ln 2}{8} w^2(K)} \gamma_n(K) \text{ dla } 0 \leqslant t \leqslant 1/2$$

oraz

$$\gamma_n(tK) \leqslant (2t)^{w^2(K)/4} \gamma_n(K) \text{ dla } 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

4. Niech X będzie symetrycznym wektorem gaussowskim, $M = \mathrm{Med}(X)$, a $\sigma = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \mathbb{E}(f^2(X))^{1/2}$. Wykaż, że dla

$$\Pr(\|X\| \leqslant tM) \leqslant \frac{1}{2}(2t)^{\frac{M^2}{4\sigma^2}}.$$

5. Wykaż, że przy oznaczeniach poprzedniego zadania dla $p, q > \min(-1, -M^2/4\sigma^2)$, $\|X\|_p \leqslant C(p, q)\|X\|_q$.

6. Określmy dla $t \geqslant 0$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $T_t f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wzorem

$$T_t f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) d\gamma_n(y).$$

Wykaż, że dla $T_t: L^p(\gamma_n) \to L^p(\gamma_n)$ oraz $\|T_t f\|_p \leqslant \|f\|_p$. Wykaż, że operatory T_t są nieujemne i symetryczne (tzn. $\int (T_t f) g d\gamma_n = \int f T_t g d\gamma_n$).

7. Wykaż, że $(T_t)_{t\geqslant 0}$ jest półgrupą mocno ciągłą (tzn. $\|T_t f - f\| \to 0$, jeśli $t \to 0$) na $L^p(d\gamma_n)$. Ponadto $\|T_t f - \int f d\gamma_n\|_p \to 0$ dla $t \to \infty$.

8. Niech L będzie generatorem T_t na L^2. Wykaż, że $C_0^\infty \subset D(L)$ oraz $Lf := \triangle f - \langle x, \nabla f\rangle$ dla $f \in C_0^\infty$.

9. Niech H_k, $k \in \mathbb{Z}_+^n$ będzie układem Hermite'a. Wykaż, że $T_t H_k = e^{-t|k|} H_k$, $LH_k = -|k| H_k$. Wykaż, że $D(L) = \{\sum_k a_k H_k \colon \sum_k |k|^2 a_k^2 < \infty\}$ oraz $L(\sum_k a_k H_k) = \sum_k -|k| a_k H_k$.

10. Wykaż, że jeśli $p \geqslant q \geqslant 1$, to dla dowolnego $f \in L^p$

$$\|T_t f\|_p \leqslant \|T_t f\|_q \text{ dla } e^{2t} \geqslant \frac{p-1}{q-1}.$$

Zestaw 9

1. i) Wykaż, że jeśli f jest funkcją parzystą, nierosnącą na $[0,\infty)$, to funkcja $t \mapsto \frac{\int_{-t}^{t} f(x)d\gamma_1(x)}{\gamma_1[-t,t]}$ jest nierosnąca;
ii) Wykaż, że jeśli K jest zbiorem wypukłym symetrycznym w $\mathbb{R}^n$, oraz $P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x_1| \leqslant 1\}$ $t \mapsto \frac{\gamma_n(K \cap tP}{\gamma_n(tP)}$ jest nierosnąca;
iii) Wykaż, że jeśli K jest wypukły symetryczny w $\mathbb{R}^n$, a P jest pasem symetrycznym, to $\gamma_n(K \cap P) \geqslant \gamma_n(K)\gamma_n(P)$.

2. Niech $f, g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ będą funkcjami takimi, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}^n$ spełniają $|x_i| \leqslant |y_i|, i = 1, \ldots, n$, to $f(x) \geqslant f(y)$, $g(x) \geqslant g(y)$. Wykaż, że $\int f(x)g(x)d\gamma_n(x) \geqslant \int f(x)d\gamma_n(x) \int g(x)d\gamma_n(x)$. Wywnioskuj stąd, że jeśli K i L są zbiorami wypukłymi, symetrycznymi względem wszystkich osi, to $\gamma_n(K \cap L) \geqslant \gamma_n(K)\gamma_n(L)$.

3. Niech f, g będą nieujemnymi, parzystymi funkcjami log-wklęsłymi na $\mathbb{R}^n$, zaś T_t półgrupą Ornsteina-Uhlenbecka. Wykaż, że
$$\int fg d\gamma_n - \int f d\gamma_n \int g d\gamma_n = \int_0^{infty} \int \langle \nabla f, \nabla T_t g \rangle d\gamma_n dt.$$
Wywnioskuj stąd, że hipoteza korelacyjna jest spełniona, jeśli wykażemy iż $\int \langle \nabla f, \nabla g \rangle \geqslant 0$ dla dowolnych funkcji parzystych log-wklęsłych na $\mathbb{R}^n$.

4. i) Niech f będzie log-wklęsłą nieujemną funkcją na $\mathbb{R}$, a $x_0 = \mathrm{med}_{\gamma_1}(f)$ w tym sensie, że $\int_{-\infty}^{x_0} f d\gamma_1 = 1/2 \int_{-\infty}^{\infty} f d\gamma_1$. Niech T będzie przekształceniem Breniera między γ_1 a $f\gamma_1 / \int f d\gamma_1$. Wykaż, że $T(0) = x_0$ oraz
$$\int_{x_0 - t}^{x_0 + t} f d\gamma_1 \geqslant \gamma_1[-t,t] \int f d\gamma_1 \geqslant \gamma_1[x_0 - t, x_0 + t] \int f d\gamma_1.$$
ii) Załóżmy, że f i g są logwklęsłe nieujemne na $\mathbb{R}$, przy czym $x_0 = \mathrm{med}_{\gamma_1}(f)$, zaś g jest parzysta. Wykaż, że
$$\int f(x)g(x - x_0)d\gamma_1 \geqslant \int f d\gamma_1 \int g d\gamma_1 \geqslant \int f d\gamma_1 \int g(x - x_0) d\gamma_1.$$
iii) Niech K będzie zbiorem wypukłym takim, że $\gamma_n(K \cap \langle x, u \rangle \leqslant s_0) = 1/2\gamma_n(K)$, zaś $P = \{x \colon s_0 - t \leqslant \langle x, u \rangle \leqslant s_0 + t\}$. Wykaż, że
$$\gamma_n(K \cap P) \geqslant \gamma_n(K)\gamma_1[-t,t] \geqslant \gamma_n(K)\gamma_n(P).$$

Zestaw 10

1. Niech X i Y będą scentrowanymi wektorami gaussowskimi w ośrodkowej przestrzeni Banacha E takimi, że $\mathbb{E}f(X)^2 \leqslant \mathbb{E}f(Y)^2$ dla $f \in E^*$. Wykaż, że
a) $\Pr(\|X\| \geqslant t) \leqslant \Pr(\|Y\| \geqslant t)$ dla $t > 0$ oraz $\mathbb{E}\|X\| \leqslant \mathbb{E}\|Y\|$.
b) $\Pr(X \in K) \geqslant \Pr(Y \in K)$ dla dowolnego symetrycznego zwartego K.

2. Niech $(X_i)_{i\in I}$ oraz X będą scentrowanymi wektorami gaussowskimi w ośrodkowej przestrzeni Banacha E takimi, że $\sup_i \mathbb{E}f(X_i)^2 \leqslant \mathbb{E}f(X)^2$ dla $f \in E^*$. Wykaż, że rodzina $(X_i)_{i\in I}$ jest ciasna.

3. Dla macierzy $n \times m$, $A = (a_{ij})$ określmy
$$\|A\| := \sup\{\sum_{ij} a_{ij}x_iy_j \colon \sum x_i^2 \leqslant 1, \sum y_j^2 \leqslant 1\}.$$
Wykaż, że dla pewnych stałych uniwersalnych $0 < c < C < \infty$ mamy
$$c(\sqrt{n} + \sqrt{m}) \leqslant \mathbb{E}\|(g_{ij})_{i\leqslant n, j\leqslant m}\| \leqslant C(\sqrt{n} + \sqrt{m}),$$
gdzie g_{ij} są iid $\mathcal{N}(0,1)$.

4. Dla $t \in \mathbb{R}^n$ określamy $X_t = \sum_{i=1}^n t_i g_i$ (tzw. kanoniczny proces gaussowski). Dla $A \subset \mathbb{R}^n$ niech $l(A) := \mathbb{E}\sup_{t\in A}|X_t|$. Wykaż, że dla $t > 0$ mamy
$$t\sqrt{\log N(A, tB_2^n)} \leqslant Kl(A) \text{ oraz } t\sqrt{\log N(B_2^n, tA^o)} \leqslant Kl(A),$$
gdzie $N(A,B)$ oznacza najmniejszą liczbę przesunięć zbioru A, które pokrywają zbiór B oraz
$$A^o := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \sup_{y\in A} |\langle x, y\rangle| \leqslant 1\}.$$

5. Wykaż, że dla dowolnego zwartego, wypukłego symetrycznego zbioru $K \subset \mathbb{R}^n$ o niepustym wnętrzu $2^n \leqslant N(K, \frac{1}{2}K) \leqslant 5^n$.

6. Dla $t \in l^2$ niech $X_t = \sum_i a_i t_i g_i$. Wykaż, że $S(a) = \mathbb{E}\sup_{\|t\|_2\leqslant 1} X_t = (\sum_i a_i^2)^{1/2}$ oraz jeśli $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$, to
$$E(a) = \int_0^\infty \sqrt{\log N(B_2, d_X, t)}dt \geqslant c\sum_{i=1}^\infty 2^{n/2}a_{2^n}.$$
Wywnioskuj stąd, że istnieje a takie, że $S(a) < \infty$, ale $E(a) = \infty$.