Wysokowymiarowy Rachunek Prawdopodobieństwa - Egzamin

Egzamin składa się z dwóch części: pisemnej i ustnej.

Część pisemna trwa 2 tygodnie i polega na **samodzielnym** rozwiązaniu sześciu spośród podanych poniżej zadań, w tym przynajmniej 2 spośród zadań 1-6 i przynajmniej 2 spośród zadań 7-12. Rozwiązania należy dostarczyć do dnia 15.02.2015 (drogą elektroniczną, osobiście lub np. włożyć do skrytki, w przypadku przesłania skanu rozwiązań, będę wdzięczny za dostarczenie orginału). W rozwiązaniach można wykorzystywać wszystkie fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

Część ustna, po uprzednim umówieniu terminu, będzie polegała na dyskusji nad przedstawionymi rozwiązaniami zadań oraz faktami wykorzystanymi w tych rozwiązaniach.

W zadaniach poniżej C jak zwykle oznacza stałe uniwersalne (nie zależące od żadnych używanych parametrów), których wartości mogą się różnić przy każdym wystąpieniu. Piszemy $f_1 \sim f_2$, jeśli $\frac{1}{C} f_1 \leqslant f_2 \leqslant C f_1$. Przez $g_1, \tilde{g}_1, g_2, \tilde{g}_2, \ldots$ będziemy oznaczać ciąg niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Niech $G_n = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$.
   i) Wykaż, że dla $p \geqslant 1$,
   $$(\mathbf{E}\|G_n\|_\infty^p)^{1/p} \sim \sqrt{\log(n+1)} + \sqrt{p}.$$
   ii) Znajdź jak najprostszą funkcję deterministyczną $f(r,p,n)$ taką, że dla $r, p \geqslant 1$,
   $$(\mathbf{E}\|G_n\|_r^p)^{1/p} \sim f(r,p,n).$$

2. Niech $X = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} g_i \tilde{g}_j$, gdzie (a_{ij}) jest pewną macierzą $n \times n$. Określamy
   $$\|(a_{ij})\|_{\mathrm{op}} := \sup\left\{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j \colon \ \sum_i x_i^2 \leqslant 1, \sum_j y_j^2 \leqslant 1\right\} \quad \text{oraz} \quad \|(a_{ij})\|_{\mathrm{HS}} := \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2\right)^{1/2}.$$
   Wykaż, że
   i) dla $t \geqslant 0$,
   $$\mathbf{P}\left(|X| \geqslant C\left(\sqrt{t}\|(a_{ij})\|_{\mathrm{HS}} + t\|(a_{ij})\|_{\mathrm{op}}\right)\right) \leqslant 2e^{-t},$$
   ii) dla $p \geqslant 2$, $\|X\|_p \leqslant C(\sqrt{p}\|(a_{ij})\|_{\mathrm{HS}} + p\|(a_{ij})\|_{\mathrm{op}})$,
   iii) $\|X\|_p \leqslant Cp\|X\|_2$ dla $p \geqslant 2$.

3. Zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne, mają średnią zero oraz $K := \sup_{i \leqslant n} \|X_i\|_{\psi_1} < \infty$. Wykaż, że
   i) dla dowolnego $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ oraz $p \geqslant 2$ zachodzi
   $$\left\|\sum_{i=1}^n a_i X_i\right\|_p \leqslant CK(\sqrt{p}\|a\|_2 + p\|a\|_\infty),$$
   ii) jeśli X_i mają symetryczny rozkład wykładniczy (tzn. rozkład z gęstością $\frac{1}{2}e^{-|x|}$), to dla $a \in \mathbb{R}^n$,
   $$\left\|\sum_{i=1}^n a_i X_i\right\|_p \geqslant \frac{1}{C}(\sqrt{p}\|a\|_2 + p\|a\|_\infty).$$

4. Niech ν oznacza symetryczny rozkład wykładniczy na $\mathbb{R}$, tzn. rozkład z gęstością $\frac{1}{2}e^{-|x|}$.
i) Wykaż, że dla dowolnej funkcji gładkiej f na $\mathbb{R}$ takiej, że $|f'| \leqslant \rho < 1$ zachodzi

$$\mathrm{Ent}_\nu(e^f) \leqslant \frac{2}{1-\rho}\int (f')^2 e^f d\nu.$$

ii) Udowodnij, że jeśli funkcja $F \in C^1(\mathbb{R}^n)$ spełnia $\max_i |\partial_i F| \leqslant 1$, to dla $|\lambda| \leqslant \rho < 1$,

$$\mathrm{Ent}_{\nu^n}(e^{\lambda F}) \leqslant \frac{2\lambda^2}{1-\rho}\int \sum_{i=1}^n (\partial_i F)^2 e^{\lambda F} d\nu^n.$$

iii) Wywnioskuj stąd, że jeśli $F \in C^1(\mathbb{R}^n)$ spełnia

$$\max_i |\partial_i F| \leqslant b \text{ oraz } \sum_{i=1}^n (\partial_i F)^2 \leqslant a^2,$$

to

$$\nu^n\left(\left\{F \geqslant \int F d\nu^n + t\right\}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{4}\min\left\{\frac{t}{b}, \frac{t^2}{a^2}\right\}\right).$$

5. Funkcja I jest określona jak w nierówności Bobkowa. Wykaż, że

$$\lim_{t\to 0+} \frac{I(t)}{t\sqrt{\ln\frac{1}{t}}} = \sqrt{2}$$

i wywnioskuj stąd, że jeśli miara probabilistyczna μ na $\mathbb{R}^n$ spełnia nierówność Bobkowa ze stałą α, to μ spełnia logarytmiczną nierówność Sobolewa ze stałą α.

6. Niech $p \geqslant 1$, $\mu, \mu_n \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R})$. Wykaż, że
i) $W_p(\mu_n, \mu) \to 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu_n \to \mu$ słabo oraz $\mathbf{E}_{\mu_n}|x|^p \to \mathbf{E}_\mu |x|^p$,
ii) jeśli $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie μ, to $W_p(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \delta_{X_k}, \mu) \to 0$ p.n..

7. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach w przestrzeni $\mathbb{X}$, a $\mathcal{F}$ przeliczalną klasą funkcji mierzalnych ograniczonych na $\mathbb{X}$ taką, że dla wszystkich $f \in \mathcal{F}$ i $x \in \mathbb{X}$, $|f(x)| \leqslant K$. Wykaż, że

$$\mathbf{E}\sup_{f\in\mathcal{F}} \sum_{i=1}^n f^2(X_i) \leqslant \sup_{f\in\mathcal{F}} \mathbf{E}\sum_{i=1}^n f^2(X_i) + CK\mathbf{E}\sup_{f\in\mathcal{F}}\left|\sum_{i=1}^n f(X_i)\right|.$$

8. Dla macierzy $(a_{ij})_{i\leqslant n, j\leqslant m}$ oraz $1 < p, q \leqslant \infty$ definiujemy

$$\|(a_{ij})\|_{p,q} := \sup\left\{\sum_{i\leqslant n, j\leqslant m} a_{ij}s_i t_j \colon\ \|s\|_p \leqslant 1, \|t\|_q \leqslant 1\right\}.$$

Niech (X_{ij}) będa niezależnymi zmiennymi o średniej zero oraz

$$K := \sup_{i,j} \|X_{ij}\|_{\psi_2} < \infty.$$

i) Wykaż, że istnieje stała $C(p,q)$ zależna tylko od p i q taka, że

$$\mathbf{E}\|(X_{ij})_{i\leqslant n, j\leqslant m}\|_{p,q} \leqslant C(p,q)K\left(n^{1-1/p}+m^{1-1/q}\right).$$

ii) Udowodnij, że jeśli X_{ij} mają dodatkowo rozkład gaussowski $\mathcal{N}(0,1)$, to

$$\mathbf{E}\|(X_{ij})_{i\leqslant n, j\leqslant m}\|_{p,q} \geqslant c(p,q)\left(n^{1-1/p}+m^{1-1/q}\right)$$

dla pewnej dodatniej stałej $c(p,q)$ zależnej tylko od p i q.
iii) Sformułuj i wykaż analogiczne oszacowania w przypadku, gdy $\min\{p,q\}=1$.

9. Niech

$$X_t = \sum_{i=1}^n a_i t_i g_i, \quad d(t,s) = \|X_t - X_s\|_2, \quad t,s \in T := \{-1,1\}^n.$$

Wykaż, że
i) dla dowolnych liczb $a_1,\ldots,a_n$,

$$\mathbf{E}\sup_{t\in T} X_t \sim \int_0^\infty \sqrt{\log N(T,d,\varepsilon)}d\varepsilon \sim \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

ii) Jeśli $a_i = 1/i$ dla $i=1,\ldots n$, to

$$\mathbf{E}\sup_{t\in T} X_t \sim \log(n+1), \quad \sup_{\varepsilon>0}\varepsilon\sqrt{\log N(T,d,\varepsilon)} \sim 1.$$

10. Załóżmy, że φ jest funkcją Younga, T jest zbiorem przeliczalnym, proces $(X_t)_{t\in T}$ spełnia warunek

$$\mathbf{E}\varphi\left(\frac{|X_t - X_s|}{d(t,s)}\right) \leqslant 1 \qquad \text{dla } t,s\in T,\ t\neq s.$$

oraz

$$\int_0^{\Delta(T)} \varphi^{-1}(N(T,d,\varepsilon))d\varepsilon < \infty.$$

Wykaż, że dla dowolnego $0<\eta,\eta' \leqslant \Delta(T)$,

$$\mathbf{E}\sup_{d(t,s)\leqslant\eta}(X_s - X_t) \leqslant C\left(\eta\varphi^{-1}(N(T,d,\eta')^2) + \int_0^{\eta'}\varphi^{-1}(N(T,d,\varepsilon))d\varepsilon\right).$$

Wywnioskuj stąd, że dla każdego $\delta>0$ istnieje $\eta>0$ taka, że

$$\mathbf{E}\sup_{d(t,s)\leqslant\eta}(X_s - X_t) \leqslant \delta$$

oraz proces $(X_t)_{t\in T}$ ma z prawdopodobieństwem 1 ciągłe trajektorie.

11. Niech $T \subset \mathbb{R}^n$ i $X_t = \sum_{i=1}^n t_i g_i$ dla $t \in T$, gdzie $g_1, \ldots, g_n$ niezależne o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$. Wykaż, że
i) dla dowolnego $s \in \mathbb{R}^n$ i ciągu (t_k) w $\mathbb{R}^n$ takiego, że $T \subset \overline{\mathrm{conv}}\{t_k\colon\ k \geqslant 1\}$ zachodzi

$$g(T) := \mathbf{E} \sup_{t \in T} X_t \leqslant C \sup_{k \geqslant 1} |t_k - s| \sqrt{\log(k+1)}.$$

ii) jeśli $g(T) < \infty$ to istnieje $s \in \mathbb{R}^n$ i ciąg (t_k) w $\mathbb{R}^n$ taki, że

$$\sup_{k \geqslant 1} |t_k - s| \sqrt{\log(k+1)} \leqslant C g(T) \quad \text{oraz} \quad T \subset \overline{\mathrm{conv}}\{t_k\colon\ k \geqslant 1\}.$$

Uwaga: $\overline{\mathrm{conv}}$ oznacza domknięcie uwypuklenia.

12. Dla przestrzeni metrycznej (T,d) określamy

$$\gamma_p(T,d) := \inf \sup_{t \in T} \sum_{n \geqslant 0} 2^{n/p} \mathrm{diam}(A_n(t), d),$$

gdzie infimum przebiega po wszystkich dopuszczalnych podziałach $(\mathcal{A}_n)_{n \geqslant 0}$ przestrzeni T.
i) Wykaż, że jeśli d_1 i d_2 to dwie metryki na T oraz $p_1, p_2 \geqslant 1$, to istnieje dopuszczalny ciąg podziałów $(\mathcal{A}_n)_{n \geqslant 0}$ przestrzeni T taki, że

$$\sup_{t \in T} \sum_{n \geqslant 0} 2^{n/p_i} \mathrm{diam}(A_n(t), d_i) \leqslant 10 \gamma_{p_i}(T, d_i) \qquad \text{dla } i = 1, 2.$$

ii) Załóżmy, że zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne, symetryczne oraz $K := \sup_{i \leqslant n} \|X_i\|_{\psi_1} < \infty$. Wykaż, że dla niepustych ograniczonych podzbiorów T w $\mathbb{R}^n$ zachodzi

$$\mathbf{E} \sup_{t \in T} \sum_{i=1}^n a_i X_i \leqslant CK \left(\gamma_1(T, d_\infty) + \gamma_2(T, d_2) \right),$$

gdzie $d_p(t,s) = \|t - s\|_p$ dla $p = 2, \infty$.
Wskazówka Może być przydatna pierwsza część zadania 3.