Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa III

Egzamin składa się z dwóch części: pisemnej i ustnej.

Część pisemna trwa 3 tygodnie i polega na **samodzielnym** rozwiązaniu sześciu spośród podanych poniżej zadań, w tym przynajmniej 3 spośród zadań 1–7 i przynajmniej 2 spośród zadań 8–12. Rozwiązania należy do mnie dostarczyć do dnia 27.06.2022 (drogą elektroniczną, osobiście lub np. włożyć do skrytki), w uzasadnionych przypadkach można negocjować przedłużenie tego terminu. W rozwiązaniach można wykorzystywać wszystkie fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach. Zadania mają zróżnicowaną trudność, która jest niezależna od ich miejsca na liście.

1. Zmienna g ma standardowy jednowymiarowy rozkład normalny $\mathcal{N}(0,1)$. Wykaż, że dla $t \geqslant 0$ zachodzą szacowania
$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(\sqrt{4+t^2}+t)}e^{-t^2/2} \leqslant \mathbf{P}(|g| \geqslant t) \leqslant \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(\sqrt{8+t^2}+3t)}e^{-t^2/2}.$$

2. Mówimy, że zmienna X ma rozkład subgaussowski ze stałą β, jeśli $\mathbf{E}X = 0$ oraz istnieje $\beta < \infty$ takie, że dla $k = 1, 2, \ldots$, $\mathbf{E}X^{2k} \leqslant \mathbf{E}(\beta g)^{2k}$, gdzie $g \sim \mathcal{N}(0,1)$.
a) Wykaż, że każdy z następujących warunków jest równoważny subgaussowskości X dla zmiennej o średniej zero
i) Istnieje $c < \infty$ takie, że $\mathbf{E}e^{\lambda X} \leqslant e^{c\lambda^2}$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$,
ii) $\mathbf{E}e^{c|X|^2} < \infty$ dla pewnego $c > 0$.
b) Wykaż, że jeśli niezależne zmienne X_i są subgaussowskie ze stałą β oraz $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$, to suma $Y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i X_i$ też jest subgaussowska. Jak można oszacować jej stałą subgaussowskości?

3. Ciąg zmiennych losowych $X_1, X_2, X_3, \ldots$ jest 1-symetryczny, tzn. dla dowolnych liczb $\eta_n \in \{-1,1\}$ rozkłady ciągów $(X_n)_n$ i $(\eta_n X_n)_n$ są jednakowe. Wykaż, że
a) $\mathbf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |\sum_{i=1}^{k} X_i| \geqslant t) \leqslant 2\mathbf{P}(|\sum_{i=1}^{n} X_i| \geqslant t)$ dla $n = 1, 2, \ldots$.
b) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ zbiega prawie na pewno wtedy i tylko wtedy gdy jest zbieżny według prawdopodobieństwa.

4. Zmienne $X_1, \ldots, X_n$ o wartościach w ośrodkowej przestrzeni Banacha $(F, \|\ \|)$ są niezależne, symetryczne oraz $\mathbf{P}(\|X_i\| > t) = 1$ dla wszystkich i. Wykaż, że dla dowolnego $x \in F$,
$$\mathbf{P}\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} X_i + x\right\| \leqslant t\right) \leqslant 2^{-n}\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$
Podaj przykład pokazujący, że stałej $2^{-n}\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$ nie można polepszyć.

5. Niezależne wektory losowe $X_1, X_2, \ldots$ mają rozkład jednostajny na zbiorze
$$K = \left\{x \in \mathbb{R}^d \colon \sum_{i=1}^{d} i|x_i| \leqslant 1\right\}$$
oraz $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.
a) Znajdź $\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n\log\log n}}$, gdzie $|x|$ oznacza długość euklidesową wektora x.
b) Co można powiedzieć o zbiorze punktów skupienia ciągu $\frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}}$?

6. Niezależne wektory losowe $X_1, X_2, \ldots$ o wartościach w $\mathbb{R}^d$ mają jednakowy rozkład z gęstością $2^{-d}\exp(-\sum_{i=1}^d |x_i|)$. Czy istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mathbf{P}\Big(\Big|\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\Big|\geqslant 1\big)?$$

Jeśli tak, to ile ona wynosi? (Jak w poprzednim zadaniu $|x|$ oznacza długość euklidesową wektora x.)

7. Niech μ oznacza miarę probabilistyczną na przestrzeni polskiej E. Wykaż, że dla każdego $c \in \mathbb{R}$ zbiór

$$\{\nu \in \mathcal{M}_1(E)\colon\ H(\nu|\mu) \leqslant c\}$$

jest zwarty w $\mathcal{M}_1(E)$ (na $\mathcal{M}_1(E)$ rozważamy topologię zbieżności według rozkładu, a $H(\nu|\mu)$ oznacza entropię ν względem μ).

8. Jednowymiarowe błądzenie losowe (S_n) startuje z zera i ma przyrosty o rozkładzie μ_β z gęstością $c_\beta(1+|x|)^{-\beta}$, $\beta > 1$. Dla jakich parametrów β błądzenie (S_n) jest powracające, a dla jakich chwilowe?

9. Podaj przykład jednowymiarowych błądzeń losowych (S_n) startujących z zera takich, że
a) $\mathbf{E}|S_1| = \infty$ oraz S_n jest powracające,
b) $\mathbf{E}S_1^+ = \mathbf{E}S_1^- = \infty$ oraz $S_n \to \infty$ p.n..
c) Czy możliwe jest, że S_n jest powracające, ale $S_n \to \infty$ wg prawdopodobieństwa?

10. Załóżmy, że η jest procesem odnowienia dla błądzenia losowego o niearytmetycznym rozkładzie przyrostów na $[0,\infty)$. Wykaż, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $t(\varepsilon) > 0$ takie, że $\mathbf{E}\eta[t, t+\varepsilon] > 0$ dla $t \geqslant t(\varepsilon)$.

11. Mówimy, że rozkład μ jest *arytmetyczny ze skokiem* $h > 0$, jeśli grupa addytywna generowana przez nośnik μ jest równa $h\mathbb{Z}$. Powiemy, że proces czasu przebywania η jest *stacjonarny* na $h\mathbb{N}$, jeśli $\theta_{kh}\eta$ ma ten sam rozkład, co $\theta_0\eta$ dla $h = 0, 1, \ldots$. Przez $\lambda_{h\mathbb{N}}$ oznaczamy miarę liczącą na $h\mathbb{N}$. Załóżmy, że błądzenie losowe ma przyrosty nieujemne o rozkładzie arytmetycznym μ o skoku h i średniej c. Wykaż, że wówczas istnieje rozkład początkowy ν na $h\mathbb{N}$ taki, że proces odnowienia η jest stacjonarny na $h\mathbb{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < c < \infty$. Udowodnij ponadto, że, jeśli η jest stacjonarny na $h\mathbb{N}$, to $\mathbf{E}\eta = \frac{h}{c}\lambda_{h\mathbb{N}}$ oraz $\nu = \frac{h}{c}(\delta_0 - \mu) * \lambda_{h\mathbb{N}}$, czyli

$$\nu\{kh\} = \frac{h}{c}\mu(kh, \infty), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

12. Nieujemne, niezdegenerowane zmienne losowe $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ są niezależne, przy czym X_i mają rozkład μ, zaś Y_i rozkład ν. Niech $S_n = \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i)$, zaś $U = \bigcup_{n\geqslant 0}[S_n, S_n + X_{n+1})$. Wykaż, że funkcja $F(t) = \mathbf{P}(t \in U)$, $t \geqslant 0$ spełnia równanie odnowienia $F = f + F * \mu * \nu$, gdzie $f(t) = \mu(t, \infty)$. Zakładając, że $X_i + Y_i$ ma rozkład niearytmetyczny o skończonej średniej oblicz $\lim_{t\to\infty} F(t)$.

Część ustna będzie oparta na rozmowie o przedstawionych rozwiązaniach oraz o wybranych tematach spośród następujących:

- Nierówności wykładnicze
- Nierówności maksymalne i symetryzacyjne
- Mocne prawa wielkich liczb
- Prawo iterowanego logarytmu
- Wielkie odchylenia dla sum zmiennych i wektorów losowych
- Względna entropia i twierdzenie Sanowa
- Błądzenia losowe - powracalność i chwilowość
- Momenty drabinowe i faktoryzacja Wienera-Hopfa
- Teoria odnowienia

Można wybrać 3 tematy z których nie chce się odpowiadać, ale nie mogą to być wszystko tematy dotyczące błądzeń losowych.