Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa III

Egzamin składa się z dwóch części: pisemnej i ustnej.

Część pisemna polega na **samodzielnym** rozwiązaniu sześciu spośród podanych poniżej zadań, w tym przynajmniej 2 spośród zadań 1-5 i przynajmniej 3 spośród zadań 6-11. Rozwiązania należy do mnie dostarczyć do dnia 30.06.2007 (drogą elektroniczną, osobiście lub np. włożyć do skrytki).

1. Mówimy, że zmienna X ma rozkład subgaussowski ze stałą β, jeśli $\mathbf{E}X = 0$ oraz istnieje $\beta < \infty$ takie, że dla $k = 1, 2, \ldots$, $\|X\|_{2k} \leqslant \beta\|g\|_{2k}$, gdzie $g \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
   a) Wykaż, że każdy z następujących warunków jest równoważny subgaussowskości X dla zmiennej o średniej zero
   i) Istnieje $c < \infty$ takie, że $\mathbf{E}e^{\lambda X} \leqslant e^{c\lambda^2}$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$,
   ii) $\mathbf{E}e^{c|X|^2} < \infty$ dla pewnego $c > 0$.
   b) Wykaż, że jeśli niezależne zmienne X_i są subgaussowskie ze stałą β oraz $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$, to $\sum_{i=1}^{\infty} a_i X_i$ też jest subgaussowski. Jak można oszacować jego stałą subgaussowskości?

2. Niezależne wektory losowe $X_1, X_2, \ldots$ o wartościach w $\mathbb{R}^d$ mają jednakowy rozkład z gęstością $2^{-d}\exp(-\sum_{i=1}^{d}|x_i|)$. Czy istnieje granica
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}\Big(\Big|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\Big| \geqslant 1)?$$
   Jeśli tak, to ile ona wynosi? (Tu i w następnym zadaniu $|x|$ oznacza długość euklidesową wektora x).

3. Niezależne wektory losowe $X_1, X_2, \ldots$ mają rozkład jednostajny na zbiorze
$$K = \Big\{x \in \mathbb{R}^d \colon \sum_{i=1}^{d} i|x_i| \leqslant 1\Big\}$$
   oraz $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.
   a) Znajdź $\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n \log\log n}}$,
   b) Co można powiedzieć o zbiorze punktów skupienia ciągu $\frac{S_n}{\sqrt{2n \log\log n}}$?

4. Ciąg zmiennych losowych $X_1, X_2, X_3, \ldots$ jest 1-symetryczny, tzn. dla dowolnych liczb $\eta_n \in \{-1, 1\}$ rozkłady ciągów $(X_n)_n$ i $(\eta_n X_n)_n$ są jednakowe. Wykaż, że
   a) $\mathbf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |\sum_{i=1}^{k} X_i| \geqslant t) \leqslant 2\mathbf{P}(|\sum_{i=1}^{k} X_i| \geqslant t)$.
   b) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ zbiega prawie na pewno wtedy i tylko wtedy gdy jest zbieżny według prawdopodobieństwa.

5. Udowodnij, że dla dowolnych liczb a_i,
$$\mathbf{P}(|\sum_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i| \geqslant (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{1/2}) \geqslant \frac{1}{10000},$$

gdzie (ε_i) jest ciągiem Bernoulliego.

6. Wykaż, że jeśli zmienne X_n zbiegają do X według rozkładu, to funkcje charakteryczne φ_{X_n} zbiegają do φ_X niemal jednostajnie (tzn. jednostajnie na zbiorach zwartych).

7. Załóżmy, że $X, X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie. Wykaż, że jeśli ciąg $\frac{1}{n^{1/p}}(X_1 + \ldots + X_n)$ jest ciasny, to
a) $\mathbf{E}X^2 < \infty$, jeśli $p = 2$
b) $\limsup_{t\to\infty} t^p \mathbf{P}(|X| \geqslant t) < \infty$ jeśli $0 < p < 2$
c) $X = 0$ p.n. jeśli $p > 2$.

8. Czy z tego, że niezdegenerowana zmienna nieskończenie podzielna przyjmuje tylko wartości całkowite wynika, że ma złożony rozkład Poissona?

9. Zmienna losowa X ma rozkład nieskończenie podzielny $\pi_{a,\sigma^2,\nu}$. Jakie warunki musi spełniać układ Levy'ego (a, σ^2, ν), żeby $\mathbf{E}\exp(\lambda X) < \infty$ dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{R}$.

10. Czy z tego, że X ma rozkład stabliny wynika, że dla dowolnych $c_1, \ldots, c_n$ istnieją liczby a iu b takie, że

$$c_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + c_nX_n \sim aX + b?$$

Jeśli nie to scharakteryzuj wszystkie rozkłady stabilne dla których powyższy warunek jest spełniony.

11. Scharakteryzuj wszystkie rozkłady stabilne w węższym sensie tzn. takie, że dla $n = 1, 2, \ldots$ istnieją $a_n > 0$ $X_1 + \ldots + X_n \sim a_nX$.

Część ustna będzie oparta na rozmowie o przedstawionych rozwiązaniach oraz o wybranych tematach spośród następujących:

- Wielkie odchylenia
- Nierówności wykładnicze
- Nierówności maksymalne
- Mocne prawa wielkich liczb
- Prawo iterowanego logarytmu
- Rozkłady nieskończenie podzielne
- Rozkłady stabilne
- Nierówność Berry-Essena

Można wybrać 2 tematy z których nie chce się odpowiadać.

Na egzamin ustny można się umówić w tygodniu 11-15 czerwca, w piątek 22 czerwca, w poniedziałek 2 lipca lub w terminie późniejszym.