Egzamin Poprawkowy z Koncentracji Miary

Egzamin składa się z dwóch części: pisemnej i ustnej.

Część pisemna polega na **samodzielnym** rozwiązaniu sześciu spośród podanych poniżej zadań. W rozwiązaniach można korzystać z wszystkich faktów wyprowadzonych w czasie wykładów lub ćwiczeń. W przypadku wątpliwości co do treści zadań proszę o kontakt mailowy.

1. Funkcja koncentracji miary μ na (X, d) spełnia $\alpha_\mu(t) \leqslant \frac{1}{(1+t)^4}$. Załóżmy, że $\mu(A) \geqslant \frac{1}{10}$. Oszacuj z góry $1 - \mu(A_t)$ oraz $\int d(x, A) d\mu(x)$.

2. Niech X będzie wektorem jednostajnie rozłożonym na S^{n-1}. Wykaż, że dla dowolnego $t \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{E}\langle t, X\rangle^2 = |t|^2/n$ oraz
$$(\mathbf{E}|\langle t, X\rangle|^p)^{1/p} \leqslant \min\left\{C\sqrt{\frac{p}{n}}, 1\right\}|t|$$
dla $p \geqslant 1$ i pewnej stałej uniwersalnej C.

3. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_m$ będą wektorami jednostajnie rozłożonymi na $[-1, 1]^n$, zaś $\|\cdot\|$ będzie pewną normą na $\mathbb{R}^n$. Wykaż, że
$$\mathbf{E} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \|X_i\| \leqslant \mathbf{E}\|X_1\| + C\sqrt{\log(m+1)} \sup_{|x|=1} \|x\|$$
dla pewnej stałej uniwersalnej C.

4. Niech μ_1 i μ_2 będą miarami probabilistycznymi z logarytmicznie wklęsłymi gęstościami na $\mathbb{R}^n$. Które z następujących miar muszą być logarytmicznie wklęsłe: $\mu_1 \otimes \mu_2$, $\mu_1 * \mu_2$, $\frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$?

5. Załóżmy, że miara μ na $\mathbb{R}^n$ spełnia nierówność Poincaré ze stałą α. Wykaż, że dla dowolnej funkcji L-lipschitzowskiej f oraz $p \geqslant 1$
$$\Big(\int |f(x)|^p d\mu(x)\Big)^{1/p} \leqslant \int |f(x)| d\mu(x) + C\sqrt{\alpha} L p$$
dla pewnej stałej uniwersalnej C. Jak zmieni się odpowiedź, jeśli założymy, że μ spełnia logarytmiczną nierówność Sobolewa ze stałą α?

6. Niech μ_p będzie miarą probabilistyczną na prostej z gęstością $c_p e^{-|x|^p}$ dla $0 < p < \infty$, gdzie c_p jest odpowiednią stałą normującą. Dla jakich p miara μ_p spełnia nierówność Poincaré?

7. Niech μ_p będzie jak w poprzednim zadaniu, zaś $\mu_p^n = \mu_p \otimes \cdots \otimes \mu_p$ będzie miarą produktową na $\mathbb{R}^n$. Wykaż, że istnieje stała uniwersalna $C < \infty$ taka, że dla dowolnego niepustego zbioru borelowskiego A i $t > 0$
$$1 - \mu_p^n\Big(A + C(\sqrt{t} B_2^n + t^{1/p} B_p^n)\Big) \leqslant \frac{1}{\mu_p^n(A)} e^{-t} \text{ dla } 1 \leqslant p \leqslant 2$$

oraz

$$1-\mu_p^n\Big(A+C(\sqrt{t}B_2^n\cap t^{1/p}B_p^n)\Big)\leqslant \frac{1}{\mu_p^n(A)}e^{-t} \text{ dla } p>2,$$

gdzie $B_p^n=\{x\in\mathbb{R}^n \sum_i |x_i|^p\leqslant 1\}$.

8. Mówimy, że przestrzeń Banacha E ma kotyp p ze stałą $T_p<\infty$, jeśli

$$\mathbf{E}\Big\|\sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i\Big\|\geqslant \frac{1}{T_p}\Big(\sum_{i=1}^n\|x_i\|^p\Big)^{1/p}$$

dla dowolnych $x_1,\ldots,x_n\in E$ (ε_i jak zawsze oznaczają niezależne symetryczne zmienne ±1). Wykaż, że
i) jeśli E ma kotyp p, to $p\geqslant 2$,
ii) każda przestrzeń ma kotyp ∞,
iii) każda przestrzeń Hilberta ma kotyp 2,
iv) przestrzeń $L^p[0,1]$ ma kotyp $\max\{2,p\}$.

9. Wykaż, że jeśli przestrzeń Banacha E ma kotyp p ze stałą T_p, to dla każdego $\varepsilon>0$ l_2^k się $1+\varepsilon$ wkłada w E dla $k\leqslant C(\varepsilon)T_p^{-2}n^{2/p}$.

10. Każdej krawędzi grafu pełnego o n wierzchołkach przypisujemy pewną zmienną losową o wartościach w $[0,1]$, przy czym zmienne przypisane różnym krawędziom są niezależne. Niech S oznacza długość najkrótszej pętli przechodzącej dokładnie raz przez każdy z wierzchołków (długością pętli nazywamy sumę zmiennych przypisanych krawędziom pętli). Wykaż, że

$$\mathbf{P}(|S-\mathbf{E}S|\geqslant t)\leqslant \exp(-\frac{t^2}{8n}).$$

Część ustna będzie oparta na rozmowie o przedstawionych rozwiązaniach oraz o wybranych tematach spośród następujących:

- Nierówności izoperymetryczne.
- Metoda martyngałowa.
- Nierówność Poincaré.
- Logarytmiczna nierówność Sobolewa.
- Nierówność splotu infimum.
- Nierówności koncentracyjne dla funkcji wypukłych.
- Twierdzenie Dvoretzky'ego. Koncentracja procesów i wektorów gaussowskich.
- Aproksymacja przez otoczkę wypukłą.

- Oszacowania supremów procesów empirycznych.
- Zastosowania koncentracji miary w kombinatoryce, teorii macierzy losowych i teorii szkła spinowego.

Należy wybrać 6 tematów z których chce się odpowiadać.